



แผนการจัดการเรียนรู้ เป็นสมรรถนะ

ชื่อวิชา.....แคลคูลัส 1.....รหัสวิชา.....30000-14014.....ทฤษฎี.....3.....หน่วยกิต

จัดทำโดย

นางอมรรรณ แก้วดวงดี

วิทยาลัยการอาชีพ ปานพร้าว

สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา

กระทรวงศึกษาธิการ



หลักสูตรรายวิชา

ชื่อวิชา แคลคูลัส 1 รหัสวิชา 30000-1401 3 หน่วยกิต



หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

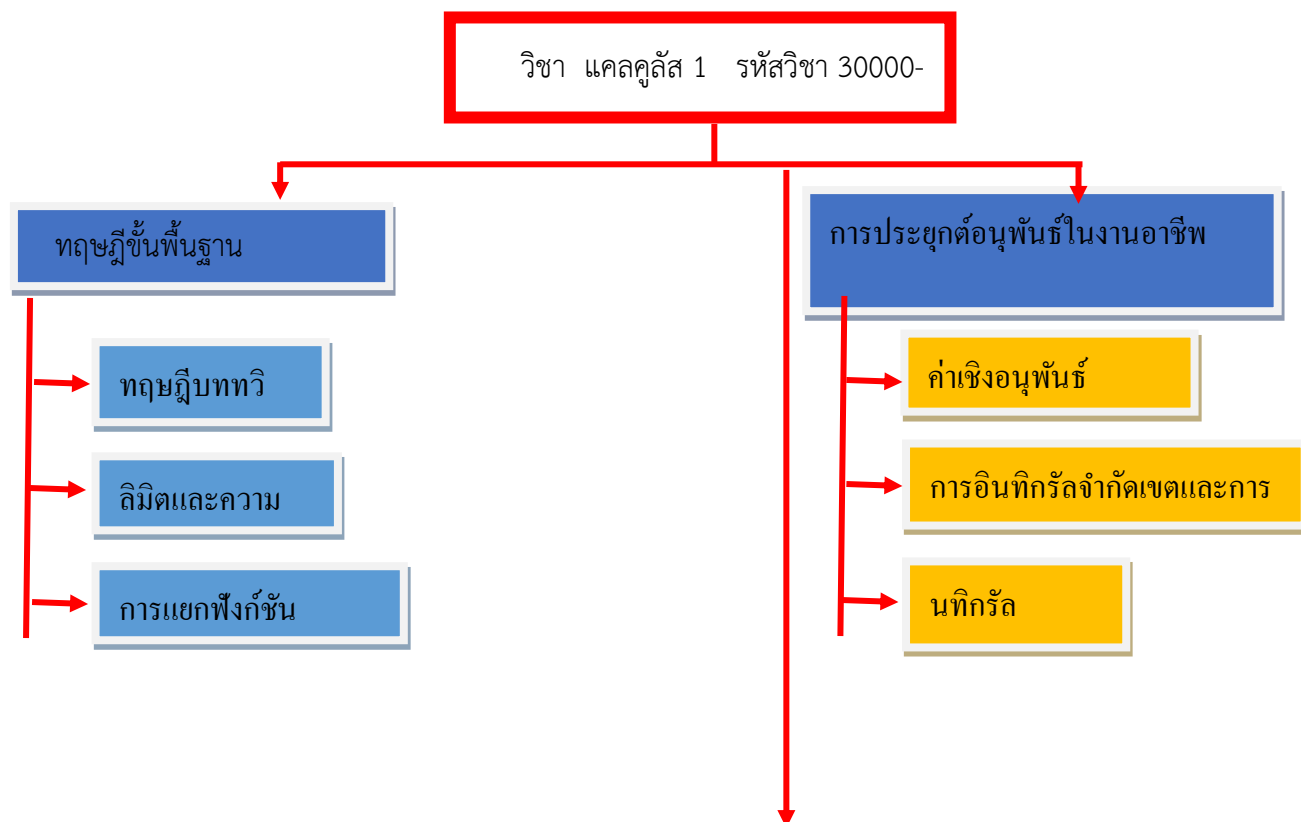
1. เข้าใจความคิดรวบยอดเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามเศษส่วนย่อย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิตอนุพันธ์ฟังก์ชันอดิศัยการประยุกต์ของอนุพันธ์อินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิตอินทิกรัลฟังก์ชันอดิศัยและอินทิกรัลจำกัดเขต
2. สามารถนำความรู้เรื่องทฤษฎีบททวินามเศษส่วนย่อย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันอนุพันธ์ของฟังก์ชันอินทิกรัลของฟังก์ชันและอินทิกรัลจำกัดเขตไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ
3. มีเจตคติที่ดีต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับการกระจายทวินาม และเศษส่วนย่อย
2. ดำเนินการเกี่ยวกับลิมิต และตรวจสอบความต่อเนื่อง และอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน
3. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย
4. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสูง และประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ
5. ดำเนินการเกี่ยวกับอินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย
6. ดำเนินการเกี่ยวกับอินทิกรัลจำกัดเขต และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาและฝึกทักษะการคิดคำนวณ และการแก้ปัญหาเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามเศษส่วนย่อย ลิมิต และความต่อเนื่องของฟังก์ชันอนุพันธ์ ฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัยการประยุกต์ของอนุพันธ์อินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัยอินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ



	หน่วยการเรียนรู้
	ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404
	ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.

หน่วย ที่	ชื่อหน่วย	จำนวน คาบ	ที่มา						
			A	B	C	D	E	F	G
1	ทฤษฎีบททวินาม	6	✓	✓					✓
2	การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็น เศษส่วนย่อย	6	✓	✓	✓				✓
3	ลิมิตและความต่อเนื่อง	6	✓	✓	✓				✓
4	อนุพันธ์	6	✓	✓	✓				✓
5	การประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ	6	✓	✓	✓	✓		✓	✓
6	ค่าเชิงอนุพันธ์	3	✓	✓	✓	✓		✓	✓
7	อินทิกรัล	6	✓	✓		✓	✓	✓	✓
8	เทคนิคการอินทิเกรต	6	✓	✓		✓	✓	✓	✓
9	การอินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์	6	✓	✓		✓	✓	✓	✓
	วัดผลและประเมินผลปลายภาค	3							
รวม		54							

หมายเหตุ

A = หลักสูตรรายวิชา

B = ประสิทธิ์ ชรินทร์เศรษฐ์. แคลคูลัส 1

C = จินดา อาจริยะกุล. อนุพันธ์และการประยุกต์.

D = จินดา อาจริยะกุล. Integrals และการประยุกต์.

E = Stewart, James. Calculus

F = Anton, Howard, Bivens, Irl, and Davis, Stephen. Calculus.

G = หนังสือแคลคูลัส 1

	ตารางวิเคราะห์หลักสูตรรายวิชา	
	ชื่อวิชา <u>แคลคูลัส 1</u> รหัสวิชา <u>30000-1404</u>	
	ท-ป-น <u>3-0-3</u> จำนวนคาบสอน <u>3</u> คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น <u>ปวส.</u>	

ชื่อหน่วย พฤติกรรม	พุทธิพิสัย (55%)					ทักษะพิสัย (25%)	จิตพิสัย (20%)	รวม (100%)	ลำดับความสำคัญ
	ความรู้ความจำ	ความเข้าใจ	ประยุกต์-นำไปใช้	วิเคราะห์	สูงค่า				
1. ทฤษฎีบททวินาม	1	2	1			2	2	8	6
2. การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย	1	2	2			2	2	9	5
3. ลิมิตและความต่อเนื่อง	2	2	2			2	2	10	4
4. อนุพันธ์	1	2	2			2	2	9	5
5. การประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ	2	2	2			2	2	10	4
6. ค่าเชิงอนุพันธ์	2	3	2			3	2	12	3
7. อินทิกรัล	2	3	2			4	3	14	2
8. เทคนิคการอินทิเกรต	2	3	2			3	2	12	3
9. การอินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์	2	3	3			5	3	16	1
รวม	15	22	18			25	20	100	
	55					25	20	100	
ลำดับความสำคัญ	1					2	3		



การวิเคราะห์หน่วยกับสมรรถนะรายวิชา

ชื่อวิชา แคลคูลัส 1 รหัสวิชา 30000-1404

ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.

[illegible]

	โครงการจัดการเรียนรู้ ชื่อวิชา <u>แคลคูลัส 1</u> รหัสวิชา <u>30000-1404</u> ท-ป-น <u>3-0-3</u> จำนวนคาบสอน <u>3</u> คาบ : สัปดาห์ <u> </u> ระดับชั้น <u>ปวส.</u>
---	---

สัปดาห์ที่	หน่วยที่	ชื่อหน่วย/รายการสอน	จำนวนคาบ
1	1	แนะนำรายวิชา วิธีการเรียน การวัดผลและประเมินผล ทฤษฎีบททวินาม 1.1 แพลทอเรียล แบบฝึกหัดที่ 1.1	3
2	1	ทฤษฎีบททวินาม (ต่อ) 1.2 สัมประสิทธิ์ทวินาม แบบฝึกหัดที่ 1.2 1.3 สามเหลี่ยมปาสคาล 1.4 ทฤษฎีบททวินาม แบบฝึกหัดที่ 1.3	3
3	2	การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย 2.1 ฟังก์ชันเศษส่วน แบบฝึกหัดที่ 2.1	3
4	2	การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย (ต่อ) 2.2 การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย แบบฝึกหัดที่ 2.2	3
5	3	ลิมิตและความต่อเนื่อง 3.1 ลิมิต แบบฝึกหัดที่ 3.1-3.11	3
6	3	ลิมิตและความต่อเนื่อง (ต่อ) 3.2 ความต่อเนื่อง แบบฝึกหัดที่ 3.12-3.13	3

	โครงการจัดการเรียนรู้ ชื่อวิชา <u>แคลคูลัส 1</u> รหัสวิชา <u>30000-1404</u> ท-ป-น <u>3-0-3</u> จำนวนคาบสอน <u>3</u> คาบ : สัปดาห์ <u> </u> ระดับชั้น <u>ปวส.</u>
---	---

สัปดาห์ที่	หน่วยที่	ชื่อหน่วย/รายการสอน	จำนวนคาบ
7	4	อนุพันธ์ 4.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง แบบฝึกหัดที่ 4.1 4.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 4.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต แบบฝึกหัดที่ 4.2-4.3 4.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย แบบฝึกหัดที่ 4.4-4.6	3
8	4	อนุพันธ์ (ต่อ) 4.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขยกกำลังและฟังก์ชันลอการิทึม แบบฝึกหัดที่ 4.7-4.9 4.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แบบฝึกหัดที่ 4.10 4.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แบบฝึกหัดที่ 4.11 4.8 อนุพันธ์อันดับสูง แบบฝึกหัดที่ 4.12	3
9	5	การประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ 5.1 ความหมายเชิงเรขาคณิตของอนุพันธ์ แบบฝึกหัดที่ 5.1 5.2 ความเร็วและความเร่ง แบบฝึกหัดที่ 5.2-5.3 5.3 อัตราสัมพัทธ์ แบบฝึกหัดที่ 5.4	3

	โครงการจัดการเรียนรู้ ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404 _____ ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	--

สัปดาห์ที่	หน่วยที่	ชื่อหน่วย/รายการสอน	จำนวนคาบ
10	5	การประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ (ต่อ) 5.4 การวิเคราะห์ลักษณะของฟังก์ชัน แบบฝึกหัดที่ 5.5-5.9	3
11	6	ค่าเชิงอนุพันธ์ 6.1 นิยามค่าเชิงอนุพันธ์และการหาค่าเชิงอนุพันธ์โดยใช้นิยาม แบบฝึกหัดที่ 6.1 6.2 สูตรของค่าเชิงอนุพันธ์และการหาค่าเชิงอนุพันธ์โดยใช้สูตร แบบฝึกหัดที่ 6.2 6.3 การประยุกต์ค่าเชิงอนุพันธ์ แบบฝึกหัดที่ 6.3	3
12	7	อินทิกรัล 7.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต 7.2 อินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิต แบบฝึกหัดที่ 7.1 7.3 อินทิกรัลของฟังก์ชันเลขยกกำลัง แบบฝึกหัดที่ 7.2	3
13	7	อินทิกรัล (ต่อ) 7.4 อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แบบฝึกหัดที่ 7.3 7.5 อินทิกรัลของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แบบฝึกหัดที่ 7.4	3
14	8	เทคนิคการอินทิเกรต 8.1 เทคนิคการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบเฉพาะ แบบฝึกหัดที่ 8.1	3

		8.2 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ แบบฝึกหัดที่ 8.2-8.4	
--	--	--	--

	โครงการจัดการเรียนรู้ ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404 ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	--

สัปดาห์ที่	หน่วยที่	ชื่อหน่วย/รายการสอน	จำนวนคาบ
15	8	เทคนิคการอินทิเกรต (ต่อ) 8.3 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการทำเป็นเศษส่วนย่อย แบบฝึกหัดที่ 8.5 8.4 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแยกส่วน แบบฝึกหัดที่ 8.6	3
16	9	การอินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์ 9.1 อินทิกรัลจำกัดเขต แบบฝึกหัดที่ 9.1	3
17	9	การอินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์ (ต่อ) 9.2 การประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขต แบบฝึกหัดที่ 9.2	
18		วัดผลสัมฤทธิ์ปลายภาคเรียน	3
รวม			54

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา <u>แคลคูลัส 1</u> รหัสวิชา <u>30000-1404</u> หน่วยที่ 1 ทฤษฎีบททวินาม ท-ป-น <u>3-0-3</u> จำนวนคาบสอน <u>3</u> คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น <u>ปวส.</u>
---	---

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 1 ทฤษฎีบททวินาม 1.1 แฟกทอเรียล 1.2 สัมประสิทธิ์ทวินาม 1.3 สามเหลี่ยมปาสคาล 1.4 ทฤษฎีบททวินาม	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ดำเนินการกระจายทวินาม วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน 1. อธิบายความหมายของแฟกทอเรียลได้ 2. ดำเนินการเกี่ยวกับแฟกทอเรียลได้ 3. อธิบายความหมายของสัมประสิทธิ์ทวินามได้ 4. หาค่าสัมประสิทธิ์ทวินามได้ 5. อธิบายนิยามของทฤษฎีบททวินามได้ 6. กระจายพจน์ของจำนวน โดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้
	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจ- พอเพียง/ ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียดรอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404 หน่วยที่ 2 การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	--

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 2 การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย 2.1 ฟังก์ชันเศษส่วน 2.2 การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ดำเนินการเกี่ยวกับเศษส่วนย่อย วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน 1. บอกแนวคิดพื้นฐานของฟังก์ชันเศษส่วนได้ 2. อธิบายรูปของฟังก์ชันเศษส่วนได้ 3. แยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อยได้
	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง/ ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียดรอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404 หน่วยที่ 3 ลิมิตและความต่อเนื่อง ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	---

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 3 ลิมิตและความต่อเนื่อง 3.1 ลิมิต 3.2 ความต่อเนื่อง	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ดำเนินการเกี่ยวกับลิมิตและตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชัน วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน 1. บอกแนวคิดพื้นฐานของลิมิตได้ 2. อธิบายความหมายของลิมิตได้ 3. หาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้นิยามได้ 4. หาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทได้ 5. หาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดเป็นช่วงได้ 6. หาลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชันได้ 7. บอกความหมายความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ 8. หาความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง/ก่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียดรอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
	ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404
	หน่วยที่ 4 อนุพันธ์
	ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 4 อนุพันธ์ 4.1 อัตราการเปลี่ยนแปลง 4.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 4.3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน พหุนาม 4.4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดย ปริยาย 4.5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขยก กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม 4.6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ 4.7 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 4.8 อนุพันธ์อันดับสูง	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และอนุพันธ์อันดับสูง วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน 1. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงได้ 2. บอกความหมายของอนุพันธ์ได้ 3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามโดยใช้กฎสี่ขั้นได้ 4. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนามโดยใช้สูตรได้ 5. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้กฎลูกโซ่ได้ 6. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายได้ 7. หาอนุพันธ์ฟังก์ชันเลขยกกำลังและลอการิทึมได้ 8. หาอนุพันธ์โดยใช้ลอการิทึมได้ 9. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ 10. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้ 11. หาอนุพันธ์อันดับสูงได้
	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง/ ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียด รอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์

	ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา
	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา <u>แคลคูลัส 1</u> รหัสวิชา <u>30000-1404</u> หน่วยที่ <u>5</u> การประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ ท-ป-น <u>3-0-3</u> จำนวนคาบสอน <u>3</u> คาบ : <u>สัปดาห์</u> ระดับชั้น <u>ปวส.</u>

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 5 การประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ 5.1 ความหมายเชิงเรขาคณิตของอนุพันธ์ 5.2 ความเร็วและความเร่ง 5.3 อัตราสัมพัทธ์ 5.4 การวิเคราะห์ลักษณะของฟังก์ชัน	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน - อธิบายความหมายเชิงเรขาคณิตของอนุพันธ์ได้ - หาสมการเส้นสัมผัสและเส้นแนวฉากได้ - อธิบายความหมายของความเร็วและความเร่งได้ - หาความเร็วและความเร่งโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ - บอกความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง ความเร็ว และความเร่งได้ - นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหาเรื่องความเร็วและความเร่งได้ - อธิบายความหมายของอัตราสัมพัทธ์ได้ - แก้ปัญหาเรื่องอัตราสัมพัทธ์ได้ - วิเคราะห์ลักษณะของฟังก์ชันได้ - อธิบายความหมายของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและฟังก์ชันลดลงได้ - หาช่วงของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือฟังก์ชันลดลงได้ - หาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชันได้

	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจ- พอเพียง/ ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียด รอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา
--	---

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 รหัสวิชา 30000-1404 หน่วยที่ 6 ค่าเชิงอนุพันธ์ ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	---

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 6 ค่าเชิงอนุพันธ์ 6.1 นิยามค่าเชิงอนุพันธ์และการหาค่าเชิง อนุพันธ์โดยใช้นิยาม 6.2 สูตรของค่าเชิงอนุพันธ์และการหาค่า เชิงอนุพันธ์โดยใช้สูตร 6.3 การประยุกต์ค่าเชิงอนุพันธ์	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ประยุกต์ค่าเชิงอนุพันธ์ในงานอาชีพ วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน - อธิบายความหมายของค่าเชิงอนุพันธ์ได้ - บอกนิยามค่าเชิงอนุพันธ์ได้ - หาค่าเชิงอนุพันธ์จากนิยามได้ - หาค่าเชิงอนุพันธ์โดยใช้สูตรได้ - ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องค่าเชิงอนุพันธ์เพื่อแก้โจทย์ ปัญหาได้
	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง/ ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียด รอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404 หน่วยที่ 7 อินทิกรัล ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	--

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 7 อินทิกรัล 7.1 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต 7.2 อินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิต 7.3 อินทิกรัลของฟังก์ชันเลขยกกำลัง 7.4 อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 7.5 อินทิกรัลของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ดำเนินการเกี่ยวกับอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันตรีโกณมิติ วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน 1. อธิบายความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้ 2. บอกนิยามของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้ 3. หาอินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตรได้ 4. หาอินทิกรัลฟังก์ชันเลขยกกำลังโดยใช้สูตรได้ 5. หาอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้สูตรได้ 6. หาอินทิกรัลฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้สูตรได้
	- ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจพอเพียง/ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียดรอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404 หน่วยที่ 8 เทคนิคการอินทิเกรต ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	--

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 8 เทคนิคการอินทิเกรต 8.1 เทคนิคการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบเฉพาะ 8.2 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ 8.3 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการทำเป็นเศษส่วนย่อย 8.4 เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแยกส่วน	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ดำเนินการเกี่ยวกับอินทิเกรตและประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน 1. หาอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบ $\int \sin^m u \cos^n u du$ ได้ 2. หาอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบ $\int \tan^m u \sec^n u du$ ได้ 3. หาอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีรูปแบบ $\int \cot^m u \csc^n u du$ ได้ 4. หาอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ 5. หาอินทิกรัลของฟังก์ชันตรรกยะโดยการทำเป็นเศษส่วนย่อยได้ 6. หาอินทิกรัลของฟังก์ชันโดยการแยกส่วนได้
	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจ-พอเพียง/ ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียดรอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา

	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม ชื่อวิชา _____ แคลคูลัส 1 _____ รหัสวิชา 30000-1404 หน่วยที่ 9 อินทิกรัลจำกัดเขตและการ ท-ป-น 3-0-3 จำนวนคาบสอน 3 คาบ : สัปดาห์ ระดับชั้น ปวส.
---	---

ชื่อเรื่อง	สมรรถนะย่อยและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
หน่วยที่ 9 อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์ 9.1 อินทิกรัลจำกัดเขต 9.2 การประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขต	สมรรถนะย่อย (Element of Competency) ดำเนินการเกี่ยวกับอินทิกรัลจำกัดเขตและประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives) ด้านความรู้และทักษะการคิดคำนวณ ประยุกต์ใช้งาน - อธิบายความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขตได้ - บอกนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขตได้ - บอกสมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขตได้ - อธิบายทฤษฎีบนหลักมูลของแคลคูลัสได้ - หาพื้นที่ระหว่างกราฟบนแกนพิกัดจาก xy โดยใช้อินทิกรัลจำกัดเขตได้ - หาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนโดยวิธีแบบจานได้ - หาปริมาตรรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกนโดยวิธีแบบเปลือกได้
	ด้านคุณธรรม จริยธรรม/บูรณาการเศรษฐกิจ-พอเพียง/ค่านิยม ตรงต่อเวลา มีวินัย มีความรับผิดชอบ ละเอียดรอบคอบ ทำงานเรียบร้อย สนใจใฝ่รู้ มีความซื่อสัตย์ ขยันหมั่นเพียร ไม่หยุดนิ่งที่จะแก้ปัญหา



แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 1

หน่วยที่ 1

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 1-3

ชื่อหน่วย ปฐมนิเทศ/ทฤษฎีบททวินาม

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การศึกษาวิชาแคลคูลัสพื้นฐานนี้ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ในงานอาชีพ รวมทั้งการนำไปประยุกต์ใช้ในการดำเนินชีวิตประจำวัน

จุดประสงค์รายวิชา

1. บอกจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชาตามหลักสูตรฯ ได้
2. บอกแนวทางการวัดผลและประเมินผลได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับการกระจายทวินาม และเศษส่วนย่อย

สาระการเรียนรู้

1. แฟกทอเรียล
2. สัมประสิทธิ์ทวินาม
3. สามเหลี่ยมปาสคาล
4. ทฤษฎีบททวินาม

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูแนะนำตัวเอง และให้ผู้เรียนแนะนำตนเองเป็นรายบุคคล

- ครูชี้แจงจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา สาระการเรียนรู้ คำอธิบายรายวิชาแนวทางการวัดผลและการประเมินผลการเรียนรู้ การปฏิบัติตนในขณะที่เข้าชั้นเรียน และให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อทดสอบความรู้พื้นฐานของผู้เรียน

ขั้นสอน

- ครูอธิบายบทนิยามแฟกทอเรียลพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

บทนิยาม

แฟกทอเรียล n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคือ $n!$

$$\text{และ } n! = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$\text{หรือ } n! = 1\cdot 2\cdot 3\dots (n-1) n$$



ถ้า $n = 0$ กำหนดให้ $0! = 1$ ซึ่งแสดงให้เห็นจริง ดังนี้

$$\text{จาก } n! = n(n-1)! \quad \text{จะได้ว่า } (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

$$\text{แทน } n = 1 \quad \text{จะได้ว่า } (1-1)! = \frac{1!}{1}$$

$$\text{นั่นคือ } 0! = 1$$

- ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1.1-1.2 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 2-3 สำนักพิมพ์ เอ็ม พันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามนักเรียนเป็นรายบุคคล
- ครูอธิบายบทนิยามสัมประสิทธิ์ทวินาม

บทนิยาม

ถ้า n, r เป็นจำนวนเต็มและ $0 \leq r \leq n$

$$\text{แล้ว } \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$



สัมประสิทธิ์ทวินาม เป็นจำนวนที่คูณกับพจน์ต่างๆ ของทวินามที่กระจายออกเป็นพจน์ย่อยๆ ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ อ่านว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม เอ็น อาร์**

ครูอธิบายสมบัติทวินามเพิ่มเติม $(a \pm b)^n$ หมายถึง ทวินามยกกำลัง n และพจน์ที่ $r + 1$ ซึ่งจะคำนวณสมบัติดังกล่าวตามบททวินาม

5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1.3-1.4 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 3-4 สำนักพิมพ์ เอ็มแพนซ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามนักเรียนเป็นรายบุคคล

ขั้นสรุปและประยุกต์

11. ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
12. ครูให้นักศึกษาจับคู่กันพร้อมเฉลยคำตอบ

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอ็มแพนซ์
2. แบบทดสอบก่อนเรียน
3. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง



แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 2

หน่วยที่ 1

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 4-6

ชื่อหน่วย ทฤษฎีบททวินาม

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การศึกษาผลบวกหรือผลต่างของพจน์ 2 พจน์ที่ยกกำลังเป็นจำนวนเต็ม ในรูปของ $(a + b)^n$ หรือ $(a - b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกนั้น เราเรียกว่า ทวินาม (Binomial) ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยๆ เราอาจกระจายโดยการคูณได้ แต่ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากๆ ควรใช้ทฤษฎีบททวินามเข้ามาช่วยในการกระจายทวินามซึ่งจะทำให้ง่าย สะดวก และรวดเร็วขึ้น

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของทวินาม และสมบัติของทวินามได้
2. สามารถกระจายทวินามโดยใช้สามเหลี่ยมปาสคาลได้
3. สามารถกระจายทวินามโดยใช้ทฤษฎีบททวินามได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับการกระจายทวินาม และเศษส่วนย่อย

สาระการเรียนรู้

1. แฟกทอเรียล
2. สมบัติทวินาม
3. สามเหลี่ยมปาสคาล
4. ทฤษฎีบททวินาม

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูสนทนาร่วมกับผู้เรียนเกี่ยวกับจำนวนแฟกทอเรียล พร้อมทั้งร่วมกันยกตัวอย่างประกอบ

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายเรื่องสามเหลี่ยมปาสคาล พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ

การกระจายทวินามของ $(a + b)^n$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อกระจายด้วยวิธีการคูณจะได้

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

จากการกระจาย $(a + b)^n$ ถ้าเราจะนำเฉพาะสัมประสิทธิ์มาเขียนจะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม ดังนี้

แถวที่ 1

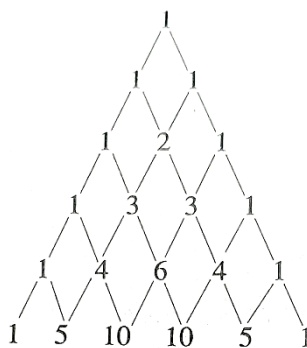
แถวที่ 2

แถวที่ 3

แถวที่ 4

แถวที่ 5

แถวที่ 6



ข้อสังเกต

จำนวนในแต่ละแถว ได้จากผลรวมของจำนวน 2 จำนวนทางซ้ายและขวาของแถวถัดขึ้นไป เช่น แถวที่ 4 เกิดจาก แถวที่ 3 ที่มี 1 2 1 จะได้ $1+2 = 3$ และ $2+1 = 3$ ส่วนริมขอบสุดจะมีค่าเป็น 1 เสมอ



2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1.5-1.6 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 6 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

พร้อมทั้งส้อมเรียกถามนักเรียนเป็นรายบุคคล

3. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 1.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 7 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมส้อมเลือกผู้เรียนออกมาเฉลย ครูและเพื่อนร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

4. ครูอธิบายบทนิยามเรื่องทฤษฎีบททวินามพร้อมอธิบายตัวอย่างที่ 1.7 พร้อมส้อมเรียกถามนักศึกษาเป็นรายบุคคล

ถ้า n และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \leq r \leq n$ แล้ว

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$\text{หรือ } (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

ข้อสังเกต 1. พจน์ที่ $r+1$ กระจายได้เป็น

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

2. สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $r+1$ คือ

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

5. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 1.2 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 8 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมส้อมเลือกผู้เรียนออกมาเฉลย ครูและเพื่อนร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

6. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 1.8 -1.10 พร้อมส้อมเรียกถามนักศึกษาเป็นรายบุคคล

ขั้นสรุปและประยุกต์

7. ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปเรื่อง สามเหลี่ยมปาสคาลและทฤษฎีบททวินาม

8. นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 1

9. ครูเฉลยพร้อมกันทั้งชั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1.หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์

2.กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

หลักฐาน

- 1.บันทึกการสอนของครู
- 2.ใบเช็ครายชื่อ
- 3.แผนการจัดการเรียนรู้
- 4.เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

- 1.ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คະແນងື້ນຢູ່ກັບການປະເມີນຕາມສາກພຈຣິງ

ກິຈກຣມເສນອແນະ

ຄູແຈກກະຕາຂເປັນື້ນໆ ໃຫ້ນັກສຶກຂາຂຶ້ນຈອຍໂປຼນາເຄື່ຍວກັບທຸຣືບທທວິນາມ ຄູຣວບຣວມແລະ ທຳເປັນສລາກ ໃຫ້ນັກສຶກຂາໃນື້ນສຸ່ມຈັບແລະຕອບຄຳຄາມຂອງເຢືອນ

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 3

หน่วยที่ 2

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 7 - 9

ชื่อหน่วย ฟังก์ชันตรรกยะ

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ฟังก์ชันตรรกยะเป็นฟังก์ชันพีชคณิตชนิดหนึ่ง ซึ่งมีการนำมาใช้ในวิชาช่างที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ประยุกต์ และสำหรับในวิชาแคลคูลัสพื้นฐานนี้ มีการนำเรื่องฟังก์ชันตรรกยะมาช่วยแก้ปัญหา เช่น การหาอินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิต ซึ่งในบางครั้งไม่สามารถหาอินทิกรัลได้โดยตรง ต้องนำมาแยกเป็นเศษส่วนย่อยก่อน จึงจะหาอินทิกรัลได้ จึงจำเป็นอย่างมากที่จะต้องมีการเรียนรู้ เรื่องฟังก์ชันตรรกยะ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกรูปแบบของฟังก์ชันตรรกยะได้
2. สามารถแยกฟังก์ชันตรรกยะเป็นเศษส่วนย่อยได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับการกระจายทวินาม และเศษส่วนย่อย

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของฟังก์ชันตรรกยะ
2. เศษส่วนย่อย

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามพร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ชั้นสอน

2. ครูอธิบายบทนิยามฟังก์ชันพหุนามพร้อมยกตัวอย่างประกอบ

บทนิยาม

ฟังก์ชันพหุนาม คือ ฟังก์ชันพีชคณิตที่เขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ไม่เป็น 0 พร้อมกันและ n เป็นจำนวนเต็มบวก



ตัวอย่าง ฟังก์ชันพหุนาม ได้แก่

(1) $f(x) = 5x^6 - 3x^3 + 4x^2 - 7$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 6

(2) $g(x) = 6x^8 - 9x^7 + 4x^2 - 5x - 9$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 8

(3) $h(x) = 2x^9 - 3x^5 + 5x^2 + 3x$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 9

สำหรับตัวอย่างฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพหุนาม ได้แก่

(1) $p(x) = 2x^{-2} + 5x^{-1} - 4$ เลขชี้กำลังเป็นลบ

(2) $q(x) = x^{3/2} + x^{2/3}$ เลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน

(3) $r(x) = 2x^e$ เลขชี้กำลังไม่เป็นจำนวนเต็มบวก

3. ครูอธิบายความหมายของฟังก์ชันตรรกยะ

บทนิยาม

ฟังก์ชันตรรกยะ หมายถึง ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของ

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

โดยที่ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามของตัวแปร x



ฟังก์ชันตรรกยะมี 2 ชนิดคือ

1. ฟังก์ชันตรรกยะที่เป็นเศษส่วนแท้ เรียกว่า ฟังก์ชันตรรกยะแท้ หมายถึง ฟังก์ชันตรรกยะในรูป

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่กำลังของ $P(x)$ น้อยกว่ากำลังของ $Q(x)$

เช่น $\frac{3x+5}{x^2-3x+4}$, $\frac{5x^2+4-7}{x^2+8}$ เป็นต้น

2. ฟังก์ชันตรรกยะที่ไม่เป็นเศษส่วนแท้ เรียกว่า **ฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้** หมายถึง

ฟังก์ชันตรรกยะในรูป $\frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่กำลังของ $P(x)$ มากกว่า หรือเท่ากับกำลังของ $Q(x)$

เช่น $\frac{x^3+3x-5x+4}{2x^3+5}$, $\frac{x^2+4}{x^2+3x-4}$ เป็นต้น

และเราสามารถเขียนฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะแท้รวมกับผลหารได้ โดยมีวิธีการเหมือนกับทำเศษส่วนเกินให้เป็นเศษส่วนคละ ดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

เมื่อ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ คือ ฟังก์ชันตรรกยะที่ไม่เป็นเศษส่วนแท้

$g(x)$ คือ ผลหารที่เป็นฟังก์ชันพหุนาม

$r(x)$ คือ เศษเหลือซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนามที่มีกำลังน้อยกว่า $Q(x)$

$\frac{r(x)}{Q(x)}$ คือ ฟังก์ชันตรรกยะที่เป็นเศษส่วนแท้

4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 20 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

5. ครูใช้เทคนิคการเรียนรู้แบบอภิปราย เพื่อให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในการเรียนการสอน โดยครูตั้งข้อสงสัยเกี่ยวกับการหาผลบวกของ $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$ ว่าสามารถทำได้อย่างไร

แล้วร่วมกับผู้เรียนอภิปรายจนได้ว่า การหาผลบวกของ นั้นสามารถทำได้โดยทำส่วนของเศษส่วนทั้งสองจำนวนให้เท่ากันก่อน แล้วจึงหาผลบวก หรือผลต่างต่อไป

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} &= \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{2x-4+3x+3}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{5x-1}{x^2-x-2} \end{aligned}$$

จากนั้นครูแนะนำให้เพิ่มเติม ในทางตรงข้าม เราสามารถแยก $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$ ให้เป็น $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$ ได้ซึ่งเรียกว่า การแยกฟังก์ชันตรรกยะให้เป็นเศษส่วนย่อย และเรียกว่า เศษส่วนย่อย

6. ครูเชื่อมโยงการอภิปรายเศษส่วนย่อยสู่ขั้นตอนการแยกฟังก์ชันตรรกยะให้เป็นเศษส่วนย่อย พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ซึ่งการแยกฟังก์ชันตรรกยะให้เป็นเศษส่วนย่อยนั้นมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 การแยกตัวของ $Q(x)$ จะได้

$$Q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot \dots \cdot q_n(x)$$

ถ้า $q_1(x)$ เป็นตัวประกอบใดๆ และ i เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\begin{aligned} \text{เราเรียน } q_1(x) &= ax+b && \text{ว่า ตัวประกอบเชิงเส้น} \\ &= (ax+b)^n && \text{ว่า ตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำ} \\ &= ax^2+bx+c && \text{ว่า ตัวประกอบกำลังสอง} \\ &= (ax^2+bx+c)^n && \text{ว่า ตัวประกอบกำลังสองซ้ำ} \end{aligned}$$

เช่น $1. X^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

จะได้ $x + 3$ และ $x - 1$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้น

$2. X^2 + 4x + 4 = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$

จะได้ $(x + 2)^2$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำ

$3. X^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

จะได้ $x + 2$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้น $x^2 - 2x + 4$ เป็นตัวประกอบกำลังสอง

$2. X^4 + 6x^2 + 9 = (x^2 + 3)(x^2 + 3) = (x^2 + 3)^2$

จะได้ $(x^2 + 3)^2$ เป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำ

ขั้นที่ 2 เขียน $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นเศษส่วนย่อย

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \dots$$

เศษส่วนย่อย แต่ละตัวจะเขียนอยู่ในรูป $\frac{A}{(ax+b)^n}$ หรือ $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $A, B, \dots$ เป็นค่าคงตัว

ตัวเศษส่วนย่อยจะเป็น A หรือ $Ax+B$ ขึ้นอยู่กับตัวส่วนว่าเป็นตัวประกอบเชิงเส้นหรือเป็นตัวประกอบกำลังสอง และจำนวนของเศษส่วนย่อย จะเท่ากับจำนวนของตัวส่วน ดังนี้

➤ กรณีตัวส่วน $Q(x)$ แยกได้เป็นตัวประกอบเชิงเส้น

$$\text{เช่น } \frac{3x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

➤ กรณีตัวส่วน $Q(x)$ แยกได้เป็นตัวประกอบเชิงเส้นซ้ำ

$$\text{เช่น } \frac{x^2+3x-5}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

➤ กรณีตัวส่วน $Q(x)$ แยกได้เป็นตัวประกอบกำลังสอง

$$\text{เช่น } \frac{x^2+2x+7}{(x^2+2)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}$$

➤ กรณีตัวส่วน $Q(x)$ แยกได้เป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำ

$$\text{เช่น } \frac{x^2-3x+3}{(x^2+2x-2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2x-2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x-2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x-2)^3}$$

➤ กรณีตัวส่วน $Q(x)$ แยกได้เป็นตัวประกอบหลายแบบปนกัน การกำหนดตัวเศษส่วน

ย่อยจะกำหนดให้สอดคล้องกับตัวส่วนของเศษส่วนย่อยแต่ละรูปแบบ เช่น

$$(1) \frac{x-3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$(2) \frac{x^2+3x+7}{(x+1)(x^2-x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x-1}$$

$$(3) \frac{x^2+5x-7}{x^2(x^2-2x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x-2}$$

$$(4) \frac{x^3+3x^2+4x-5}{x^2(x^2+2x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+B}{x^2+2x-2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2x-2)^2}$$

ขั้นที่ 3 หาผลบวกของเศษส่วนย่อย โดยใช้หลักการบวก-การลบเศษส่วน

ขั้นที่ 4 หาค่าคงตัว $A, B, C, \dots$ ซึ่งมี 2 วิธี คือ

4.1 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์

4.2 วิธีกำหนดค่าตัวแปร

ขั้นที่ 5 หาค่าคงตัว A, B, C ที่ได้ในเศษส่วนย่อยแต่ละตัว

7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.2 - 2.5 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 22-26 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

8. ครูอธิบายการแยกส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้

การแยกฟังก์ชันตรรกยะไม่แท้ออกเป็นเศษส่วนย่อย จะทำได้โดย การทำให้เป็นฟังก์ชันเศษส่วนคละก่อนแล้วจึงนำฟังก์ชันตรรกยะแท้ไปแยกออกเป็นเศษส่วนย่อยต่อไป

9. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 2.6 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 26 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

ขั้นสรุปและการประยุกต์

10. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปเรื่อง ฟังก์ชันตรรกยะ
11. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 2 ข้อ 1 – 3 หน้า 28 – 32 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์
12. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ
13. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด

- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันตรรกยะ ครูรวบรวมและ
ทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 4

หน่วยที่ 3

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 10-12

ชื่อหน่วย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ลิมิต (limit) มีความหมายว่า ชี้ดจำกัด ใช้สัญลักษณ์ $\lim$ แทนคำว่า ลิมิต $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L ซึ่งลิมิตของฟังก์ชันจะหาค่าได้ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ และเป็นลิมิตที่หาค่าไม่ได้}$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันได้
2. สามารถหาค่าลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับลิมิต และตรวจสอบความต่อเนื่อง และอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

1. ตัวแปรและฟังก์ชัน
2. การหาค่าของฟังก์ชัน
3. ความหมายของลิมิต
4. ลิมิตของตัวแปรและฟังก์ชัน
5. ทฤษฎีบทของลิมิต
6. ลิมิตของฟังก์ชันที่ค่าอนันต์
7. ลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ
8. การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบของ $\frac{0}{0}$
9. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูสนทนาซักถามผู้เรียนด้วยความเป็นกันเอง

ขั้นสอน

2. ครูและผู้เรียนร่วมกันอภิปรายเรื่องค่าคงตัวและตัวแปร เพื่อเชื่อมโยงสู่ฟังก์ชัน

ค่าคงตัว (Constants) คือ จำนวนที่มีค่าได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น จะแบ่งออกเป็น 2

ชนิด คือ (1) **ค่าคงตัวถาวร (Numerical constants)** เป็นค่าคงตัวที่มีค่าคงตัวตลอดไป หมายถึง ค่าคงตัวที่เป็นตัวเลขต่างๆ หรือค่าคงตัวที่เป็นที่ทราบกันแน่นอนว่าค่าเหล่านี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เช่น

2, 3, $\sqrt{3}$, $\frac{4}{7}$, π และ e เป็นต้น

(2) **ค่าคงตัวถาวร (Arbitrary constants)** เป็นค่าคงตัวเป็นตัวอักษร นิยมใช้เป็น a หรือ k เช่น $ax^2 + bx + c = 0$ ตัว a, b และ c เป็นค่าคงตัวชั่วคราว เราสามารถแทนค่าตัว a, b และ c ด้วยตัวเลขได้

ตัวแปร (Variables) คือ จำนวนที่มีค่าไม่จำกัด แปรเปลี่ยนไปได้หลายค่า ตามเงื่อนไขที่กำหนด ถ้า x เป็นตัวแปร หมายความว่า x จะมีค่าแปรเปลี่ยนหลายค่า เช่น $x = 1, 2, 3, \dots, 9$ เป็นต้น ถ้า x และ y เป็นตัวแปรที่มีความสัมพันธ์กันในรูปของ $y = x^2$

ถ้ากำหนดให้ $x = 1$ จะได้ว่า $y = 1^2 = 1$

$x = 2$ จะได้ว่า $y = 2^2 = 4$

$x = 3$ จะได้ว่า $y = 3^2 = 9$

จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไป จะส่งผลทำให้ค่าของ y เปลี่ยนไปทุกครั้ง เราจะเรียก x ว่า **ตัวแปรอิสระ** และ y ว่า **ตัวแปรตาม** ความสัมพันธ์ของ x และ y ในลักษณะที่กำหนดให้นี้ เราเรียกว่า **ฟังก์ชัน** ซึ่งเมื่อเรากำหนดค่า x หนึ่งค่า เราก็จะหาค่า y ได้หนึ่งค่าเท่านั้น

จะเขียน y ได้ในรูป x นั่นคือ $y = f(x)$ อ่านว่า y เท่ากับ ฟังก์ชันของ x

ครูแนะนำต่อว่า เราสามารถเขียนฟังก์ชันในรูปของเซตของคู่ลำดับ (x, y) โดยเขียนเป็น

$$f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = f(x) \}$$

เราเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริง เพราะเมื่อกำหนดค่า x หนึ่งค่าเราก็มาหาค่า y ได้หนึ่งค่าเช่นกัน แต่กำหนดค่า x หนึ่งค่าแล้ว หาค่า y ได้มากกว่าหนึ่งค่า เราไม่ถือว่าเป็นฟังก์ชัน เราจะเลือกเซต

ของคู่ลำดับในลักษณะนั้นว่า **ความสัมพันธ์** สำหรับคู่ลำดับที่เป็นฟังก์ชันและความสัมพันธ์จะเรียกเซตของ x ว่า **โดเมนของฟังก์ชัน** และเซตของ y ว่า **เรนจ์ของฟังก์ชัน**

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 3.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 35 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

4. ครูอธิบายการหาค่าของฟังก์ชันโดยการยกตัวอย่างที่ 3.2-3.4 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 35-36 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

5. ครูให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 3.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 36 สำนักพิมพ์ เอมพันธ์ เพื่อทดสอบความเข้าใจ

6. ครูอธิบายการความหมายของลิมิตพร้อมทั้งเชื่อมโยงสู่ลิมิตของตัวแปรและฟังก์ชัน

ลิมิต มีความหมายว่า **“ขีดจำกัด”** อาจหมายรวมถึงคำว่าเข้าใกล้ หรือ ขอบเขตของค่าใดค่าหนึ่งก็ได้ เช่น a เป็นจำนวนจริงและเป็นค่าคงตัว ลิมิตของ a จะมีค่าเท่ากับ a , ลิมิตของ 5 จะมีค่าเท่ากับ 5 และลิมิตของ -3 มีค่าเท่ากับ -3 เป็นต้น

สัญลักษณ์ที่ใช้ในเรื่องของลิมิต จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\rightarrow$ คือ เขียนค่าตัวแปรหรือค่าคงตัวค่าหนึ่งไว้ทางซ้ายมือหรือทางลูกศร และค่าคงตัวอีกค่าหนึ่งไว้ทางขวาหรือหัวลูกศร เช่น $x \rightarrow a$ อ่านว่า เอกซ์เข้าใกล้เอ, $x \rightarrow 6$ อ่านว่า เอกซ์ เข้าใกล้ หก เป็นต้น

บทนิยาม

a จะเป็นลิมิตของตัวแปร x ก็ต่อเมื่อ x และ a มีค่าต่างกันน้อยมาก คือ ผลต่างของค่า x และ a มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เขียนแทนด้วย $x \rightarrow a$ หรือ $\lim_{x \rightarrow a} = a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปร



ลิมิตของตัวแปรและฟังก์ชัน

บทนิยาม

เมื่อกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a เราจะกล่าวว่า L เป็นลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ x เข้าใกล้ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



คำว่า x เข้าใกล้ a นั้น มีความหมายได้ 2 ทาง คือ

เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ จะกล่าวว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วย $x \rightarrow a^-$
 ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย จะเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ จะกล่าวว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย $x \rightarrow a^+$
 ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา จะเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

ดังนั้น การที่เราจะกล่าวว่า ค่าของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ จะหาค่าได้หรือไม่นั้น ต้องพิจารณากันที่ค่าของ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ซึ่งค่าทั้ง 2 นี้ ต้องหาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ L เท่ากันทั้ง 2 ค่า จึงจะสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

ขอให้ผู้เรียนพิจารณาจากลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ประกอบ

(1) กำหนดให้ $f(x) = \frac{-x}{|x|}$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 0

จาก $f(x) = \frac{-x}{|x|}$

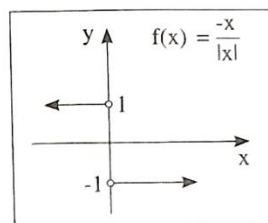
จะได้ $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x > 0 \\ 1 & ; x < 0 \end{cases}$

จากกราฟของฟังก์ชัน จะได้ว่า

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

เราจะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ดังนั้นค่า $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

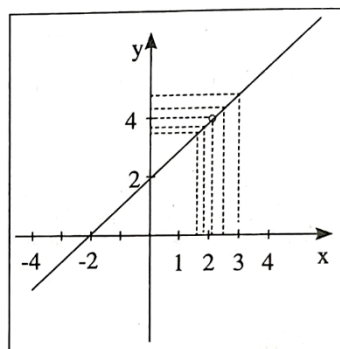


(2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 2

จาก $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2}$

$f(x) = x + 2 ; x \neq 2$

$x < 2$		$x > 2$	
x	$f(x)=x+2$	x	$f(x)=x+2$
1.5	3.5	2.5	4.5
1.9	3.9	2.1	4.1
1.95	3.95	2.05	4.05
1.995	3.995	2.005	4.005
1.999	3.999	2.001	4.001



จากกราฟและการทดลองแทนค่า x เพื่อหาค่า $f(x)$ เราจะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทั้งทางด้านซ้าย และทางด้านขวา ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 4 ทั้ง 2 ทาง นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \text{ดังนั้น} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \text{นั่นเอง}$$

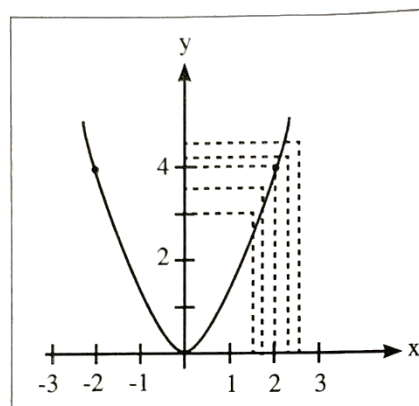
ทดลองแทนค่า $x = 2$ ลงใน $f(x)$ จะได้ว่า

$f(2) = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์ แสดงว่า ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x = 2$ หาค่าไม่ได้

(3) ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 2

จาก $f(x) = x^2$

$x < 2$		$x > 2$	
x	$f(x)=x^2$	x	$f(x)=x^2$
1.5	2.25	2.5	6.25
1.9	3.61	2.1	4.41
1.95	3.8025	2.05	4.2025
1.995	3.980025	2.005	4.020025
1.999	3.996001	2.001	4.004001



จากกราฟและการทดลองแทนค่า x เมื่อ x เข้าใกล้ 2 จะพบว่า ค่า $f(x)$ จะเข้าใกล้ 4 ทั้งทางด้านซ้ายและทางด้านขวาของ 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \text{แสดงว่า} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

7. ครูอธิบายการหาขีดจำกัดของตัวแปรและฟังก์ชันโดยการยกตัวอย่างที่ 3.5 - 3.6 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 39-40 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

8. ครูอธิบายอธิบายทฤษฎีของขีดจำกัดพร้อมทั้งยกตัวอย่างที่ 3.7-3.9 ประกอบการอธิบายในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 41-43 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ และสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

9. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 3.2 เพื่อทดสอบความเข้าใจ และสุ่มผู้เรียนออกมาเฉลย พร้อมทั้งอภิปรายคำตอบร่วมกัน

10. ครูและผู้เรียนช่วยกันอภิปรายขีดจำกัดของฟังก์ชันที่ค่าอนันต์ในหนังสือเรียน

แคลคูลัส 1 หน้า 44 - 45 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ ครูสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

11. ครูและผู้เรียนช่วยกันอภิปรายลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะในหนังสือเรียน

แคลคูลัส 1 หน้า 45 - 48 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างที่ 3.15 – 3.20 ประกอบการอธิบาย จากนั้นครูสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

12. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 3.3 เพื่อทดสอบความเข้าใจ และสุ่มผู้เรียนออกมาเฉลย พร้อมทั้งอภิปรายคำตอบร่วมกัน

13. ครูและผู้เรียนช่วยกันอภิปรายการหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบของ $\frac{0}{0}$ ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 48 - 52 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างที่ 3.21 – 3.26 ประกอบการอธิบาย จากนั้นครูสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้

14. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 3.4 – 3.6 เพื่อทดสอบความเข้าใจ และสุ่มผู้เรียนออกมาเฉลย พร้อมทั้งอภิปรายคำตอบร่วมกัน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

15. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปเรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันและการหาลิมิตของฟังก์ชัน

16. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.1 ข้อ 1 – 10 หน้า 53 – 55 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

17. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

18. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

19. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.1

ข้อ 1 – 15 หน้า 56 - 57 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์เป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์

2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

- 1.บันทึกการสอนของครู
- 2.ใบเช็ครายชื่อ
- 3.แผนการจัดการเรียนรู้
- 4.เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

- 1.ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์
คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูให้นักศึกษาเขียนสรุปสูตรทฤษฎีบทของลิมิต ครูรวบรวมและทำเป็นสลากให้นักศึกษาตอบคำถาม

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 5

หน่วยที่ 3

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 10-11

ชื่อหน่วย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ความต่อเนื่อง (Continuous) เป็นคุณสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของฟังก์ชัน ในคณิตศาสตร์ชั้นสูง จะมีทฤษฎีต่าง ๆ เป็นจำนวนมากที่เกี่ยวข้องกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน การพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยทั่วไป เราอาจตรวจสอบโดยพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันขาดตอนอย่างน้อย 1 จุด แสดงว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องบนจุดนั้น นั่นคือ ถ้าฟังก์ชันมีค่าที่จุดใด ฟังก์ชันจะต่อเนื่องที่จุดนั้น และถ้าฟังก์ชันไม่มีค่าที่จุดใด ฟังก์ชันนั้น ย่อมไม่ต่อเนื่องที่จุดนั้น ความต่อเนื่องของฟังก์ชันแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ ความต่อเนื่องบนจุดและความต่อเนื่องบนช่วง

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
2. สามารถหาค่าความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับลิมิต และตรวจสอบความต่อเนื่อง และอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

1. ตัวแปรและฟังก์ชัน
2. การหาค่าของฟังก์ชัน
3. ความหมายของลิมิต
4. ลิมิตของตัวแปรและฟังก์ชัน
5. ทฤษฎีบทของลิมิต
6. ลิมิตของฟังก์ชันที่ค่าอนันต์
7. ลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ
8. การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบของ $\frac{0}{0}$
9. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

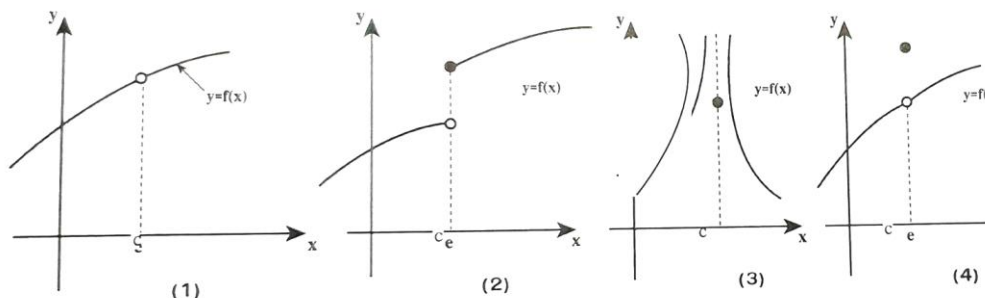
1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันและการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่าง ๆ พร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการยกตัวอย่างประกอบการอธิบาย

ในการศึกษาเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันนั้น เพื่อความเข้าใจอย่างง่าย ๆ ครูขอ ยกตัวอย่างการสังเกตน้ำที่ไหลผ่านท่ออย่างเส้นเล็กๆ ซึ่งไม่มีรอยรั่ว จะพบว่าน้ำไหลต่อเนื่องกันไปอย่างสม่ำเสมอ เมื่อผู้เรียนเจาะรูที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งของสายท่อนั้น จะพบว่าน้ำไหลไม่สะดวก อาจมีการพุ่งของน้ำตรงตำแหน่งที่เจาะรูด้วย และไหลไปตามท่อด้วย เปรียบท่อยางเหมือนเส้นโค้งของฟังก์ชัน ตอนที่ยังไม่เจาะรู เราก็จะบอกว่าฟังก์ชันต่อเนื่อง เพราะสายน้ำในท่อยางไหลต่อเนื่องกัน แต่เมื่อเจาะรูท่อยางแล้วน้ำไหลไม่สะดวกก็เหมือนฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ถ้าศึกษาความต่อเนื่องของฟังก์ชันแล้ว จะพบว่าความต่อเนื่องของฟังก์ชันมี 2 ลักษณะ คือ ความต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่ง กับความต่อเนื่องบนช่วงใดช่วงหนึ่ง

3. ครูอธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชันแบบจุด โดยให้ผู้เรียนพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันข้างล่างนี้ว่า ในรูปต่อไปนี้ฟังก์ชัน $y = f(x)$ หรือมีความต่อเนื่องหรือไม่ที่จุด c



จากรูปพิจารณากฎเหล่านี้ที่จุด c ซึ่งจะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้จะไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = c$ ในรูปที่ (1) กราฟมีจุดโปร่งที่ c เพราะว่าฟังก์ชันไม่สามารถหาค่าได้ที่ $x = c$ สำหรับรูป (2) และ (3) ฟังก์ชันหาค่าได้ที่ $x = c$ ก็จริงอยู่ แต่ลิมิตของฟังก์ชัน คือ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ หาค่าไม่ได้ จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง เส้นกราฟของฟังก์ชันเหล่านั้นจะเป็นเส้นกราฟที่แตกไม่ติดต่อกันหรือราบเรียบ ส่วนกราฟในรูปที่ (4) ฟังก์ชัน f หาค่าได้ที่จุด c และ $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ก็ค่าไม่ได้ แต่ค่าของ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$ แสดงว่ากราฟยังคงเป็นเส้นแตกที่จุด $x = c$ คือ ไม่ต่อเนื่องที่จุด c เช่นกัน

จากสาเหตุของความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $x = c$ นี้ ทำให้เราสามารถสรุปนิยามของความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ดัง

บทนิยาม เมื่อ $c \in \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อมีสมบัติดังนี้

- (1) $f(c)$ หาค่าได้
- (2) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ หาค่าได้
- และ (3) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$



ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

4. ครูอธิบายการหาค่าความต่อเนื่องแบบจุดโดยการยกตัวอย่างที่ 3.27-3.29 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 60 - 61 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล
5. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 3.7 และ 3.8 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 60 และ 62 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ เพื่อทดสอบความเข้าใจ จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย
6. ครูอธิบายความต่อเนื่องแบบช่วง โดยพิจารณานช่วงปิด $[a, b]$ ใดๆ โดยพิจารณา

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$ ได้จากเงื่อนไขที่กำหนด โดยฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b) เสมอ

บทนิยาม

ฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

- (1) $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a, b)
- (2) $f(x)$ ต่อเนื่องทางด้านขวาที่ a นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- (3) $f(x)$ ต่อเนื่องทางด้านซ้ายที่ b นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$



7. ครูยกตัวอย่างที่ 3.30 - 3.32 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 62 - 64 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ และสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

8. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปเรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
9. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.2 ข้อ 1 - 10 หน้า 65 - 69 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์
10. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ
11. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น
12. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.2 ข้อ 1 - 15 หน้า 69 - 71 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์เป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้

4.เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

- 1.ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 6

หน่วยที่ 4

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 16-18

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นการศึกษาถึงการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรในฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลงทีละน้อย เริ่มจากศึกษาการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรก่อน ผลการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทำให้ฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร เราเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย คือ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ และเมื่อ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 เราจะเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรนี้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของฟังก์ชัน หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน นั่นคือ

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตหรือปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันได้
2. สามารถหาค่าปฏิยานุพันธ์ได้
3. สามารถหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

สาระการเรียนรู้

1. การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร
2. การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน
3. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร
4. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับตัวแปรพร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร ดังนี้

ตัวแปร หมายถึง ค่าที่เปลี่ยนแปลงค่าได้ ซึ่งค่าของตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงไปนั้นจะมีได้

2 ลักษณะ คือ เปลี่ยนในลักษณะที่เพิ่มขึ้นและเปลี่ยนในลักษณะที่ลดลง เช่น ถ้า x เป็นตัวแปร ส่วนที่เปลี่ยนไปของค่า x เราเรียกว่า ส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ x (Increasment of x) เขียนแทนด้วย Δx ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้ว ถ้า Δx มีค่าเป็นบวก แสดงว่า ตัวแปร x เปลี่ยนไปในลักษณะที่เพิ่มขึ้น และถ้า Δx มีค่าเป็นลบก็แสดงว่า ตัวแปร x เปลี่ยนไปในลักษณะที่ลดลง ทำนองเดียวกันตัวแปรอื่นๆ ก็คิดลักษณะเดียวกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร x เช่นกัน

3. ครูอธิบายการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน ดังนี้

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ (x) กับตัวแปรตาม (y) ซึ่งเราเขียนอยู่ในรูปของ $y = f(x)$ เมื่อ x มีการเปลี่ยนแปลงจากค่าของ x_1 ไปเป็น x_2 แล้วค่าของ y ย่อมต้องมีการเปลี่ยนแปลงค่าไปด้วยเช่นกัน นั่นคือ y จะมีการเปลี่ยนจาก y_1 ไปเป็น y_2 ค่าที่เปลี่ยนของ x เราเขียนแทนด้วย $\Delta x = x_2 - x_1$ ซึ่งเราจากเขียนแทน $x_2 = x_1 + \Delta x_1$ ก็ได้ทำนองเดียวกัน ค่าที่เปลี่ยนของ y เราเขียนแทนด้วย $\Delta y = y_2 - y_1$ ซึ่งเราจากเขียนแทนด้วย $y_2 = y_1 + \Delta y$ ได้เช่นกัน

$$y = f(x)$$

$$y_1 = f(x_1) \text{ และ } y_2 = f(x_2)$$

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

เราเรียกค่า $\Delta f = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ จะมีผลเหมือนกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร นั่นคือ

ถ้า Δy หรือ Δf มีค่าเป็นบวก แสดงว่า ฟังก์ชันนั้นจะเปลี่ยนไปในลักษณะที่เพิ่มขึ้น และ ถ้า Δy หรือ Δf มีค่าเป็นลบ แสดงว่า ฟังก์ชันนั้นจะเปลี่ยนไปในลักษณะที่ลดลง

4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 74 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

- 5.ครูอธิบายอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร ดังนี้

จากหัวข้อที่ 1 และ 2 ที่ได้ศึกษามาแล้วนั้น เราสามารถหาอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้ โดยอาศัยความรู้ในเรื่องการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร การเปลี่ยนแปลงฟังก์ชัน และเรื่องอัตราส่วน นั่นคือ

$$\text{ถ้ากำหนดให้} \quad y_1 = f(x_1) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{และ} \quad y_2 = f(x_2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(2) - (1) ; \text{ จะได้ว่า} \quad y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\therefore \quad \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{จาก (3) หารถลอดด้วย } \Delta x \text{ จะได้ว่า} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\text{ซึ่งอาจเขียน } x \text{ แทน } x_1 \text{ ก็ได้ ดังนั้น} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \dots\dots\dots (4)$$

จากสมการ (4) เราเรียก $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน $f(x)$ หรือ y เทียบกับตัวแปร x

บทนิยาม

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ x เขียนแทนด้วย

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

หรือเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงในช่วง x ถึง $x + \Delta x$ ก็ได้



6. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4.2 – 4.5 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 75-78

สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

7. ครูอธิบายอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

จากความรู้ในเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร เมื่อกำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x แล้ว เมื่อ x มีค่าเปลี่ยนไปเป็น $x + \Delta x$ แล้วค่าของ $f(x)$ จะเปลี่ยนไปเป็น $f(x + \Delta x)$ ดังนั้น ส่วนที่เปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน คือ $f(x + \Delta x) - f(x)$ ส่วนที่เปลี่ยนแปลงของตัวแปร x คือ Δx

อัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x เราแทนด้วย

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ หรือ } \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ มีค่าเท่ากับ } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

จะเห็นได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x)$ ขึ้นอยู่กับตัวแปร x นั่นคือ Δf จะขึ้นอยู่กับ Δx ถ้าค่าของ Δx มีการเปลี่ยนแปลงที่ละน้อยมากๆ หมายความว่า มีค่าเข้าใกล้ 0 เราก็มักเรียกอัตรการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x)$ ในลักษณะนี้ว่า เป็นการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ (Instantaneous rate of change) ของ $y = f(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ในทางคณิตศาสตร์ เราจะเรียกอัตรการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y = f(x)$ ที่ x ใด ๆ นี้ว่า อนุพันธ์ (Derivative) ของ $y = f(x)$ ที่ x โดยเราจะเขียนแทน $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ด้วย $\frac{dy}{dx}$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ นั่นเอง

บทนิยาม

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อ ลิมิตตามบทนิยามนี้ หาค่าได้



ข้อสังเกต

ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าได้ เราจะกล่าวว่า y มีอนุพันธ์ที่ x ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าไม่ได้ เราจะกล่าวว่า y ไม่มีอนุพันธ์ที่ x ซึ่งการจะหาค่า $\frac{dy}{dx}$ ได้หรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ นั่นเอง

สัญลักษณ์ที่ใช้เกี่ยวกับอนุพันธ์มีดังนี้

$\frac{dy}{dx}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์ หมายถึง อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

$\frac{dz}{dx}$ อ่านว่า ดีแซดบายดีเอกซ์ หมายถึง อนุพันธ์ของ z เทียบกับ x

$\frac{dq}{dt}$ อ่านว่า ดีคิวบายดีที หมายถึง อนุพันธ์ของ q เทียบกับ t



8. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 4.6 – 4.7 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 80-82 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุม่เรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน จากนั้นให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 4.1 เพื่อทดสอบความเข้าใจ ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย

ขั้นสรุปและการประยุกต์

9. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
10. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 4 ข้อ 1 – 5 หน้า 83 – 85 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์
11. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ
12. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น
13. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำข้อสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 4 ข้อ 1 - 15 หน้า 86 - 87 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์เป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

- 1.หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
- 2.กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

- 1.บันทึกการสอนของครู
- 2.ใบเช็ครายชื่อ
- 3.แผนการจัดการเรียนรู้
- 4.เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

- 1.ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน

4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง

2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

3. แบบทดสอบเก็บคะแนน

4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

3. แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

4. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง

5. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)

6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 7

หน่วยที่ 5

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 19-21

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต เป็นการหาค่าอนุพันธ์ที่เขียนในรูปประพจน์ ตัวแปรอิสระอันประกอบด้วยตัวแปรนั้นๆ กับเครื่องหมายทางพีชคณิตซึ่งการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตนอกจากใช้บทนิยามแล้วยังสามารถคำนวณได้โดยการใช้สูตร

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันพีชคณิตได้
2. สามารถหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย
2. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสูง และการประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของฟังก์ชันพีชคณิต
2. ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร
4. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
5. การหาอนุพันธ์อันดับสูง

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันพร้อมทั้งร่วมกันเฉลยแบบทดสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 4 เพื่อเป็นการซักถามข้อสงสัยและทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายความหมายของฟังก์ชันพีชคณิต ดังนี้

ในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันนั้น เราแบ่งฟังก์ชันออกเป็น 2 ชนิด คือ ฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) คือ ฟังก์ชันซึ่งมีค่าฟังก์ชันเขียนได้ในรูปของพจน์ ตัวแปรอิสระ อันประกอบด้วยตัวแปรนั้นกับเครื่องหมายทางพีชคณิต (บวก, ลบ, คูณ,หาร, ยกกำลัง และค่าสัมบูรณ์) เช่น $y = x^3 - 3x + 1$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$ เป็นต้น

3. ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 89 - 97 สำนักพิมพ์เอดมันท์ ซึ่งมีทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตทั้งหมด 7 บท ดังนี้

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{d}{dx} cu = c \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} uv = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right]$
7. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$

จากสูตรในข้อ 7 ถ้าเรามี $y = x^n$ สามารถหาค่าได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \frac{dx}{dx} \text{ แต่ } \frac{dx}{dx} = 1 \\ \frac{dx^n}{dx} &= nx^{n-1} \\ \text{เช่น } \frac{dx^5}{dx} &= 5x^4, \frac{dx^{-12}}{dx} = -12x^{-13} \text{ เป็นต้น} \end{aligned}$$

4. ครูอธิบายการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 ตัวอย่างที่ 5.1 – 5.6 หน้า 98 - 101 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 5.1 ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย

5. ครูอธิบายการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเพิ่มเติม โดยใช้กฎลูกโซ่ ดังนี้
ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ u ซึ่งเขียนได้ในรูปของ $y = f(u)$ และ u เป็นฟังก์ชันของ x จึงเขียนได้ในรูปของ $u = F(x)$ ดังนั้น เราจะเขียน y ในรูปของฟังก์ชัน x ได้เป็น $y = f(F(x))$

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(F(x))$ นี้ เราสามารถหาได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 8

ถ้า $y = f(u)$ และ $u = F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้แล้ว เราจะได้ว่า $y = f[F(x)]$ และสามารถหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x ได้จาก

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



พิสูจน์

$$\text{จาก } y = f(u) \quad \dots\dots(1) \qquad u = F(x) \quad \dots\dots(1)'$$

$$\therefore y + \Delta y = f(u + \Delta u) \quad \dots\dots(2) \qquad u + \Delta u = F(x + \Delta x) \quad \dots\dots(2)'$$

$$(2) - (1) ;$$

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \quad \dots\dots(3)$$

$$(1) - (2) ;$$

$$\Delta u = F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad \dots\dots(3)'$$

$$(3) \times (3)' \quad \text{จะได้ว่า } \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \right] \cdot \left[\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right]$$

ใส่ค่า $\lim$ เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ ทั้งสองข้าง

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \right] \left[\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \right] \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \right]$$

เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ จะทำให้ $\Delta u \rightarrow 0$ ด้วย

$$\text{ดังนั้น } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

แคลคูลัส 1 ตัวอย่างที่ 5.7 – 5.10 หน้า 103 - 106 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 5.2 ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

7. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปความหมายของฟังก์ชันพีชคณิต การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยการปริยาย และการหาค่าอนุพันธ์อันดับสูง

8. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5 ข้อ 1 – 5 หน้า 113 – 114 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอดมสัน

9. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

10. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

11. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5 ข้อ 1 - 15 หน้า 115 - 117 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอดมสันเป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอดมสัน
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
4. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
5. เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 4- 5 คน ให้นักศึกษารวบรวมโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
พีชคณิตและการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้กฎลูกโซ่ และแลกเปลี่ยนกลุ่มกันทำระหว่างกลุ่ม
บันทึกหลังการสอน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 8

หน่วยที่ 6

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 22-24

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต แต่มีรูปแบบเฉพาะของตนเอง หรืออาจกล่าวได้ว่ามีลักษณะเฉพาะ
ตามแต่ลักษณะของแต่ละฟังก์ชัน นั่นคือ ฟังก์ชันอดิสัย ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 ชนิด คือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันอดิสัยได้
2. สามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัยได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์ของพีชคณิต และฟังก์ชันอดิสัย
2. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสูง และประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของฟังก์ชันอดิสัย
2. ชนิดของฟังก์ชันอดิสัย
3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
5. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม
6. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตพร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ดังนี้

ฟังก์ชันโดยปริยาย คือ ฟังก์ชันที่เขียนขึ้นมาโดยไม่สามารถจะบอกได้ว่า ตัวแปรใดเป็นตัวแปรอิสระ ตัวแปรใดเป็นตัวแปรตาม เราถือว่า ตัวแปรที่ปรากฏในฟังก์ชันลักษณะนี้มีความสำคัญเท่าเทียมกัน เช่น $x^2 + 3y - y^2 = x^2y = 10$ และ $x^2 - y^2 = 3xy$ เป็นต้น

การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย สามารถหาค่าได้โดย

1. หาอนุพันธ์ของแต่ละข้างของสมการเทียบกับ x แล้วใช้วิธีพีชคณิต แก้สมการหาค่า $\frac{dy}{dx}$
2. หาอนุพันธ์ของแต่ละข้างของสมการเทียบกับ y แล้วใช้วิธีพีชคณิต แก้สมการหาค่า $\frac{dx}{dy}$

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 5.11 – 5.12 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 107-109 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 5.3 ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

4. ครูอธิบายการหาอนุพันธ์อันดับสูง ดังนี้

จากบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x นั่นคือ $\frac{dy}{dx}$

หรือ y' สามารถหาได้ $f'(x)$ เราจะเรียก $\frac{dy}{dx}$ หรือ y' ว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน y เทียบกับ x

ถ้า $\frac{dy}{dx}$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ เราก็จะเรียกอนุพันธ์ของ $\frac{dy}{dx}$ ว่า อนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชัน

y เทียบกับ x และเขียนแทนด้วย $\frac{d^2 y}{dx^2}$ หรือ y'' หรือ $f''(x)$

$$\text{นั่นคือ } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

ถ้า $\frac{d^2 y}{dx^2}$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ เราก็จะเรียกอนุพันธ์ของ $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ว่า อนุพันธ์อันดับที่สามของ

ฟังก์ชัน y เทียบกับ x และเขียนแทนด้วย $\frac{d^3 y}{dx^3}$ หรือ y''' หรือ $f'''(x)$

$$\text{นั่นคือ } \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

ในทำนองเดียวกันนี้ เราจะสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y เทียบกับ x ที่สูงขึ้นเรื่อยๆ ได้จนถึงอันดับที่ n ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$ เมื่อ n เป็นจำนวน

เต็มบวก เราจะเรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่สูงกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับที่ 1 นี้ว่า **อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน** (Higher Order Derivative of Function)

5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 5.13 – 5.14 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 110-112

สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 5.4 ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยการปริยาย และการหาอนุพันธ์อันดับสูง

7. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5 ข้อ 4 – 5 หน้า 114 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

8. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

9. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

10. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5 ข้อ 1 - 15 หน้า 115 - 117 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์เป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์

2. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ พร้อมสัมภาษณ์นักเรียนเป็นรายบุคคลคะแนนขึ้นอยู่กับประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแบ่งกลุ่มกลุ่มละ 4- 5 คน ให้นักศึกษารวบรวมโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยปริยายและการหาอนุพันธ์อันดับสูง และแลกเปลี่ยนกลุ่มกันทำระหว่างกลุ่ม

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 9**หน่วยที่ 1-5****รหัส 30000-1404****แคลคูลัส 1****คาบที่ 25-27****ชื่อหน่วย สอบกลางภาค****จำนวน 2 ชั่วโมง**

สาระการเรียนรู้**สอบกลางภาคเป็นการวัดความรู้และความเข้าใจหน่วยที่ 1 - 5**

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 10

หน่วยที่ 6

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 28-30

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ฟังก์ชันอดิสัย คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต แต่มีรูปแบบเฉพาะของตนเอง ได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัยต่างๆ สามารถหาค่าได้โดยการใช้สูตร ซึ่งมีการพิสูจน์ และการนำไปใช้เรียนกันอย่างละเอียดในแต่ละชนิด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันอดิสัยได้
2. สามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัยได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์ของพีชคณิต และฟังก์ชันอดิสัย

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของฟังก์ชันอดิสัย
2. ชนิดของฟังก์ชันอดิสัย
3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
5. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม
6. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับความหมายและชนิดของฟังก์ชันอดิสัย พร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังนี้

สูตรสำหรับหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีทั้งหมด 6 สูตร คือ

1. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$	2. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	4. $\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$	6. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

2. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6.1 พร้อมทั้งให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 6.1 ในหนังสือเรียน แคลคูลัส 1 หน้า 128 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ เพื่อทดสอบความเข้าใจ จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย
3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6.2 – 6.3 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 129 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ โดยสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบคำตอบ
4. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 6.2 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ เพื่อทดสอบความเข้าใจ จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย
5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6.4 – 6.14 (อาจอธิบายไม่ต้องครบทุกตัวอย่าง) ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 130 - 135 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ โดยสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบคำตอบ
6. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 6.3 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 136 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ เพื่อทดสอบความเข้าใจ จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย
7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6.15 – 6.16 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 136 - 137 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ โดยสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบคำตอบ
8. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ เพื่อทดสอบความเข้าใจ
9. ครูอธิบายการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ดังนี้

ก่อนจะเรียนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันโดยวิธีการใช้สูตรนั้น ผู้เรียนควรทำความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันเสียก่อน

ถ้า $x = \sin y$ เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติแล้ว เราจะกล่าวว่า $y = \arcsin x$ เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบผกผัน เมื่อ y เป็นมุมใดๆ ที่ $\sin$ ของมันมีค่าเท่ากับ x ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ในรูปของ $y = \arcsin x$ จะเขียนแทนด้วย $y = \sin^{-1} x$ โดยสัญลักษณ์ -1 ไม่ได้หมายถึง ตัวเลขชี้กำลัง นั่นคือ

$$\sin^{-1} x \neq \sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$$

$\sin^{-1} x$ อ่านว่า อาร์คไซน์ของ x หรืออินเวอร์สไซน์ของ x
สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันอื่นๆ ก็จะอธิบายได้ในทำนองเดียวกัน จึงสรุปเป็นนิยาม ดังนี้

บทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

1. $y = \arcsin x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ และ $-1 \leq x \leq 1$
2. $y = \arccos x$ เมื่อ $0 \leq y \leq \pi$ และ $-1 \leq x \leq 1$
3. $y = \arctan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ และ $-\infty < x < \infty$
4. $y = \text{arccot } x$ เมื่อ $0 < y < \pi$ และ $-\infty < x < \infty$
5. $y = \text{arcsec } x$ เมื่อ $-\pi \leq y < -\frac{\pi}{2}$ และ $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ และ $|x| \geq 1$
6. $y = \text{arccosec } x$ เมื่อ $-\pi < y \leq -\frac{\pi}{2}$ และ $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$ และ $|x| \geq 1$

การหาอนุพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ก็สามารถหาได้ 6 สูตร เท่ากับจำนวนฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันนั่นเอง ครูอธิบายการพิสูจน์ทั้ง 6 สูตรนี้โดยอาศัยความรู้เรื่องบทนิยามของฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติมาช่วยอ้างในการพิสูจน์ในหนังสือแคลคูลัส 1 หน้า 142 – 145 สำนักพิมพ์เอดมสัน

สูตรที่ 1 $\frac{d}{dx} (\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

$$\text{สูตรที่ 2} \quad \frac{d}{dx} \arccos u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$\text{สูตรที่ 3} \quad \frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\text{สูตรที่ 4} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\text{สูตรที่ 5} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$\text{สูตรที่ 6} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

10. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6.17 – 6.21 (อาจอธิบายไม่ต้องครบทุกตัวอย่าง) ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 146 - 149 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ โดยสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

11. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 6.4 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 149 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ เพื่อทดสอบความเข้าใจ จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย

12. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 6.22 – 6.25 (อาจอธิบายไม่ต้องครบทุกตัวอย่าง) ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 150 - 152 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ โดยสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

ขั้นสรุปและการประยุกต์

13. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสิย

14. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.2 ข้อ 1 – 6 หน้า 153 – 155 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

11. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

12. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

- 1.ครูให้นักศึกษาเขียนสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และให้นักศึกษาท่องจำ
 - 2.ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน
- บันทึกหลังการสอน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 11

หน่วยที่ 6

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 31-33

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิสัย

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ฟังก์ชันอดิสัย คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต แต่มีรูปแบบเฉพาะของตนเอง ได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม การหาอนุพันธ์

ของฟังก์ชันอดิศัยต่างๆ สามารถหาค่าได้โดยใช้สูตร ซึ่งมีการพิสูจน์ และการนำไปใช้เรียนกันอย่างละเอียดในแต่ละชนิด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันอดิศัยได้
2. สามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของฟังก์ชันอดิศัย
2. ชนิดของฟังก์ชันอดิศัย
3. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
4. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
5. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม
6. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน พร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม ดังนี้
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมโดยใช้สูตร ซึ่งมีด้วยกัน 2 สูตร คือ



$$1. \frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx} \quad (\text{เมื่อ } a > 0, a \neq 1)$$

$$2. \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

3. ครูและผู้เรียนช่วยกันอธิบายตัวอย่างที่ 6.25 – 6.30 (อาจอธิบายไม่ต้องครบทุกตัวอย่าง) ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 158 - 161 สำนักพิมพ์เอดมันท์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล และถามตอบผู้เรียนเป็นระยะเพื่อกระตุ้นผู้เรียนและซักถามความเข้าใจของผู้เรียน

4. ครูอธิบายการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ดังนี้

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function) คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปเลขยกกำลังโดยมีเลขยกกำลังเป็นตัวแปร นั่นคือ $y = a^x$ เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระ y เป็นตัวแปรตาม, a เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ในบางครั้งตัวแปรชี้กำลังอาจจะเป็นฟังก์ชันของ x ก็ได้ เช่น ถ้าเราให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ดังนั้น $y = a^{u(x)}$ ก็ถือเป็นฟังก์ชันชี้กำลังเหมือนกัน แต่เป็นฟังก์ชันประกอบ

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังจะมีสูตร 2 สูตรที่ใช้โดยทั่วไปคือ

$$1. \frac{da^u}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$2. \frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

5. ครูอธิบายการตัวอย่างที่ 6.31 – 6.32 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 163 - 164 สำนักพิมพ์เอดมันท์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 6.5 จากนั้นครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 6.5 แล้วสุ่มผู้เรียนออกมาเฉลย จากนั้นครูและเพื่อนร่วมกันอภิปรายและตรวจคำตอบ ครูซักถามความเข้าใจและข้อสงสัยของผู้เรียน แล้วจึงร่วมกันสรุปสูตรการหาอนุพันธ์ ดังนี้

สรุปสูตรการหาอนุพันธ์

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{dc}{dx} = 0$ | 14. $\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ |
| 2. $\frac{dx}{dx} = 1$ | 15. $\frac{d}{dx} \arccos u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ |
| 3. $\frac{d}{dx} cu = c \frac{du}{dx}$ | 16. $\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ |
| 4. $\frac{dx}{dx} (u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$ | 17. $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ |
| 5. $\frac{d}{dx} uv = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ | 18. $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$ |
| 6. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right]$ | 19. $\frac{d}{dx} \operatorname{arc cosec} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$ |
| 7. $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$ | 20. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$ |
| 8. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$ | 21. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$ |
| 9. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$ | 22. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ |
| 10. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ | 23. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$ |
| 11. $\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$ | |
| 12. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$ | |
| 13. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$ | |

6. ครูและผู้เรียนช่วยกันอธิบายตัวอย่างที่ 6.33 – 6.36 (อาจอธิบายไม่ครบทุกตัวอย่าง) ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 166 - 171 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล และถามตอบผู้เรียนเป็นระยะเพื่อกระตุ้นผู้เรียนและซักถามความเข้าใจของผู้เรียน

7. ครูชี้แนะข้อสังเกตเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเพิ่มเติม ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 172 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

ขั้นสรุปและการประยุกต์

8. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง พร้อมทั้งร่วมกันสรุปสูตรการหาอนุพันธ์ทั้งหมดอีกครั้ง
9. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.3 ข้อ 1 – 8 หน้า 173 – 176 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอดมสัน
10. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ
11. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น
12. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนแบบทดสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.3 ข้อ 1 - 15 หน้า 177 - 179 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอดมสันเป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

- 1.หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอดมสัน
- 2.กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

- 1.บันทึกการสอนของครู
- 2.ใบเช็ครายชื่อ
- 3.แผนการจัดการเรียนรู้
- 4.เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

- 1.ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล (ต่อ)

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 12

หน่วยที่ 7

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 34-36

ชื่อหน่วย การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นการนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เรียนมาใช้อย่างเห็นจริง เช่น นำมาใช้ในการเขียน กราฟของฟังก์ชัน ความชันของเส้นโค้ง การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด สัมพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอนุพันธ์อันดับที่สอง การนำความรู้เรื่องค่าสูงสุดและต่ำสุดไปใช้ประโยชน์ในทางช่างและชีวิตประจำวัน การหาความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง การหาค่าอัตราสัมพันธ์ เป็นการหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของสองสิ่งเปรียบเทียบกับ การหาค่าประมาณโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถหาค่าและคำนวณค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพันธ์ของฟังก์ชันได้
2. สามารถหาค่าปฏิยานุพันธ์ได้
3. สามารถหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตได้

สมรรถนะรายวิชา

1. การดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสูง และประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ

สาระการเรียนรู้

1. ความชันของเส้นโค้ง
2. ฟังก์ชันอดิสัยชนิดต่างๆ

3. อัตราสัมพัทธ์
4. การหาค่าเชิงอนุพันธ์
5. การหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

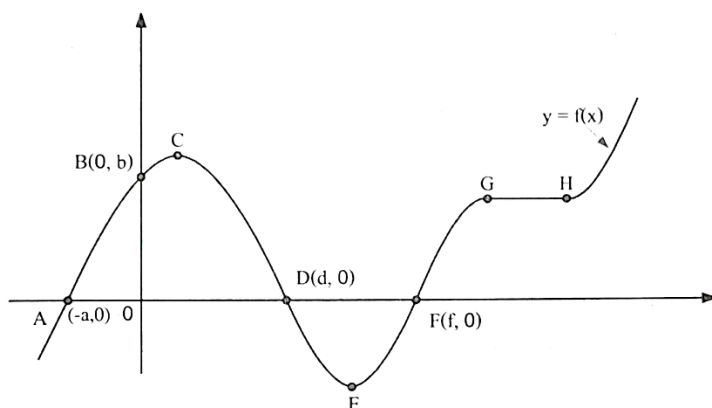
ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับอนุพันธ์เชิงฟังก์ชันอดิสัยพร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายความชันของเส้นโค้ง โดยการยกตัวอย่างฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเส้นโค้ง กล่าวได้ว่า เป็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ x ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระ และค่าของ y ซึ่งเป็นตัวแปรตาม เมื่อนำมาเขียนกราฟจะเป็นเส้นซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตามการเปลี่ยนแปลงของค่า x และ y ซึ่งอาจเขียนรูปของเส้นโค้งแบบรวมๆ ได้ดังนี้

(รูปที่เขียนนี้ไม่ใช่กราฟของฟังก์ชันที่เกิดจริงแต่เป็นจินตนาการของเส้นโค้งในหลายๆ ลักษณะมารวมกัน)



รูปที่ 7.1 แสดงกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$

จากการเขียนกราฟที่เราจะดูง่าย ๆ ก็คือ การพิจารณาหาจุดตัดแกนทั้งสองแกนของกราฟก่อน นั่นคือ จุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y จากรูป 7.1 เราจะพบว่า จุดตัดแกน x มี 3 จุดคือ $A(-a, 0)$, $D(d, 0)$ และ $F(f, 0)$ จุดตัดแกน y มีจุดเดียว คือ $B(0, b)$ เนื่องจากกราฟเป็นเส้นโค้ง ดังนั้นจึงมีทั้งโค้งคว่ำ และโค้งหงาย ช่วงใดที่เป็นโค้งคว่ำก็จะทำให้เกิดจุดสูงสุดของฟังก์ชันในช่วงนั้นๆ เราเรียก **จุดสูงสุดสัมพัทธ์** (Relative Maximum Point) ในรูป คือ จุด C ช่วงจาก A ถึง D เรียกว่า ช่วงโค้งคว่ำ ช่วงใดที่เป็นโค้งหงายก็จะทำให้เกิดจุดต่ำสุดของฟังก์ชันในช่วงนั้นๆ เราเรียกว่า **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์** (Relative Minimum Point) ในรูป

คือ จุด E ช่วงจาก D ถึง F เรียกว่า ช่วงโค้งหลาย นอกจากนี้ ถ้าช่วงใดค่าของฟังก์ชันมีค่าเท่ากับทุกค่าตลอดในช่วงนั้น เราจะเรียกว่า เป็นช่วงคงที่ของฟังก์ชัน (Constant Interval) เช่น ในช่วง G ถึง H ตามรูปที่ 7.1

3. ครูอธิบายการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันจากทฤษฎีบทจากความหมายของอนุพันธ์ทางเรขาคณิต ซึ่งผู้เรียนควรมีความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องก่อน ดังนี้

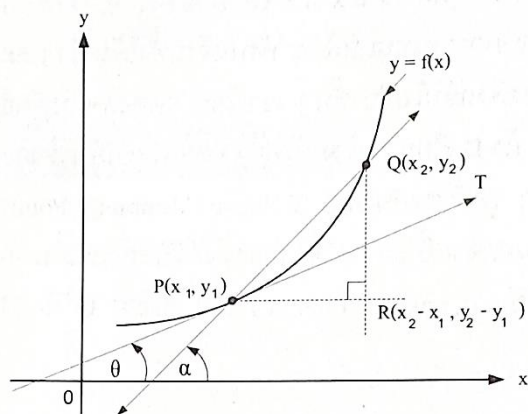
เส้นสัมผัส (Tangent line) หมายถึง เส้นตรงที่แตะเส้นโค้งของฟังก์ชันเพียงจุดเดียวเท่านั้น

ความชันของเส้นสัมผัส (Slope of tangent line) หมายถึง ค่า tangent ของมุมที่เส้นสัมผัสทำกับแกน x โดยวัดทวนเข็มนาฬิกา ณ จุดสัมผัสนั้น

ความเอียงของเส้นสัมผัส (Inclination of tangent line) หมายถึง ค่า ขนาดมุมที่เส้นสัมผัสทำกับแกน x โดยวัดทวนเข็มนาฬิกา ณ จุดสัมผัสนั้น

ความชันของเส้นโค้งที่ จุด $P(x, y)$ หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ นั้นเอง
พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งใดๆ ดังรูปที่ 7.2

ในการเขียนกราฟเส้นโค้งของฟังก์ชันในเบื้องต้นนั้น เราจะอาศัยความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ x กับค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ หรือ y ที่ละคู่อันดับเป็นคู่ๆ ไปเท่านั้น ซึ่งความละเอียดของกราฟที่ได้อาจจะไม่ละเอียดพอ ดังนั้นเราจะอาศัยอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y เทียบกับ x เข้ามาช่วยในการให้รายละเอียดในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน นั่นคือ ความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ และเป็นความชันของเส้นสัมผัสโค้ง ณ จุดนั้นๆ



รูปที่ 7.2

พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งใดๆ ดังรูปที่ 7.2 ให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = f(x)$
เส้นตรง PT สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด P
 α เป็นมุมเอียงของเส้นตรง PQ
 θ เป็นมุมเอียงของเส้นสัมผัส PT

จากรูป Δ มุมฉาก PRQ เราจะได้ว่า $\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ซึ่งค่านี้คือ ค่าความชันของเส้นตรง PQ นั่นเอง ส่วนความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง PT คือ $\tan \theta$

ถ้าจุด Q เคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นโค้งเข้าใกล้จุด P โดยที่จุด P คงที่ Δx จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เส้นตรง PQ ก็จะเคลื่อนเข้าใกล้เส้นสัมผัส PT ทำให้มุม α มีขนาดใกล้เคียงกับมุม θ

$$\text{จะได้ } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \alpha = \tan \theta$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด P ใดๆ และจะเป็นความชันของเส้นโค้งที่จุดนั้นๆ ด้วย แต่เนื่องจากการหาค่าอนุพันธ์ สามารถใช้สูตรได้ การหาความชันของเส้นโค้งสามารถหาได้ดังนี้

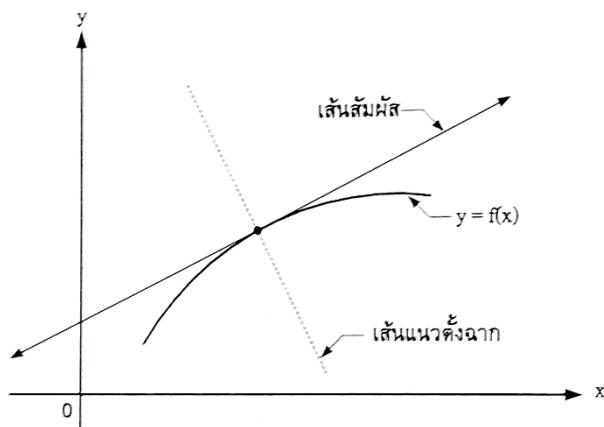
3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 183 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 7.1 เพื่อทดสอบความเข้าใจแล้วให้ผู้เรียนออกมาเฉลย ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง จากนั้นครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.2 เพิ่มเติม และมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 7.2 ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลย

4. ครูอธิบายสมการของเส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉากของเส้นโค้ง ดังนี้

เส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ เส้นตรงที่ลากมาสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุดสัมผัสนั้นๆ การหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งอาศัยความรู้เรื่องการเขียนสมการเส้นตรง เมื่อทราบความชันและจุดสัมผัส นั่นคือ ความชันที่จุดสัมผัส $m = \frac{dy}{dx}$ ที่จุด (x_1, y_1) และจุดสัมผัส คือ $P(x_1, y_1)$ ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งได้เป็น $y - y_1 = m(x - x_1)$ โดยที่ $m = \frac{dy}{dx}$ ที่จุด (x_1, y_1)

เส้นแนวตั้งฉาก (Normal line) คือ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดสัมผัสนั้น การหาสมการเส้นแนวตั้งฉาก ก็ทำได้ในทำนองเดียวกับเส้นสัมผัส

ความชันของเส้นแนวตั้งฉาก $= -\frac{1}{m}$ เมื่อ m เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ซึ่งสามารถเขียนสมการของเส้นแนวตั้งฉากได้เป็น $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ นั่นเอง ขอให้ดูรูปที่ 7.3 ประกอบ

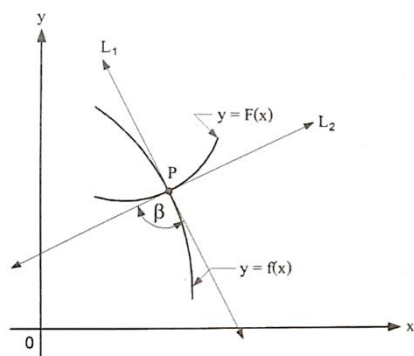


รูปที่ 7.3

5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.3 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 186 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

6. ครูแนะนำมุมที่เส้นโค้งสองเส้นตัดกัน ดังนี้

บทนิยาม ถ้าเส้นโค้งสองเส้น คือ $y = f(x)$ และ $y = F(x)$ ตัดกันที่จุด P มุมที่เส้นโค้งตัดกัน หมายถึง มุม β ระหว่างเส้นสัมผัสโค้งสองเส้นที่มี P เป็นจุดสัมผัส ดังรูป สามารถหามุม β ได้จาก



รูปที่ 7.5

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right)$$

เมื่อ m_1 เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$

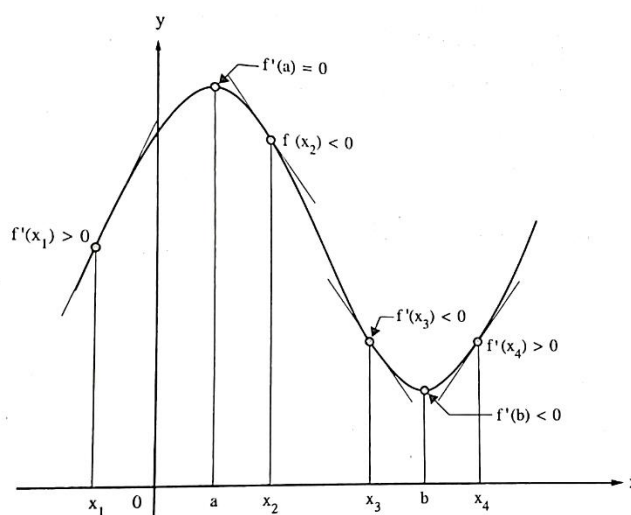
และ m_2 เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = F(x)$

7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.4 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 187-188 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

8. ครูอธิบายจุดสูงสุด จุดต่ำสุด และจุดเปลี่ยนเว้า ดังนี้

จากความรู้เกี่ยวกับความชันของเส้นโค้งนั้นจะช่วยอธิบายหรือสามารถสังเกตการเปลี่ยนแปลงของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ได้ว่า มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาตามค่าของความชันที่เปลี่ยนแปลงไปเรื่อยๆ จากรูปที่ 7.1 ถ้าเราลากเส้นสัมผัสโค้งในแต่ละช่วงเปลี่ยนจากจุดหนึ่งไปเป็นอีกจุดหนึ่งเรื่อยๆ นั้น เราจะพบว่า ในบางช่วงค่าของความชันจะเปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ จุดที่มีค่าความชันเป็นศูนย์ในช่วงนี้ จะให้ค่าสูงสุด

สัมพัทธ์ ในบางช่วงค่าของความชันจะเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก จุดที่มีค่าความชันเป็นศูนย์ ในช่วงนี้จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์



รูปที่ 7.6

พิจารณาจากรูปที่ 7.6 เราจะพบว่าจุดที่ $x = a$ จะอยู่ระหว่าง x_1 กับ x_2 จากความชันของเส้นสัมผัสโค้งจะได้ว่า คือ ค่าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = x_1$ และ $f'(x_2)$ คือ ค่าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = x_2$ โดยที่ $f'(x_1) > 0$ และ $f'(x_2) < 0$ และค่าความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = a$ จะมีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้น ตรงจุด $x = a$ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $y = f(x)$

ทำนองเดียวกัน เราจะพบว่า จุดที่ $x = b$ จะอยู่ระหว่างจุด x_3 กับ x_4 จากเรื่องความชันของ เส้นสัมผัสโค้งจะได้ว่า $f'(x_3)$ คือ ค่าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = x_3$ และ $f'(x_4)$ คือ ค่าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = x_4$ โดยที่ $f'(x_3) < 0$ และ $f'(x_4) > 0$ และค่าความชันของเส้นโค้งที่จุด $x = b$ จะมีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้น ตรงจุด $x = b$ จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $y = f(x)$

9. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.5 – 7.7 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 191-196

สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

10. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปความชันของเส้นโค้งหรือเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

สรุป

การหาความชันของเส้นโค้งหรือเส้นสัมผัสเส้นโค้ง มีหลักดังนี้

1. หาอนุพันธ์ของเส้นโค้งที่กำหนดให้ ซึ่งจะเท่ากับความชันของเส้นโค้งนั้นที่จุดใดๆ
2. ให้ (x_1, y_1) เป็นพิกัดของจุดที่ต้องการ (จุดสัมผัส)
3. แทนค่า (x_1, y_1) ลงในอนุพันธ์ตามข้อ 1 ก็จะเป็นความชันของเส้นโค้ง หรือความชันของ

เส้นสัมผัสเส้นโค้งตรงจุดสัมผัสที่ต้องการ

11. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปวิธีการค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $y=f(x)$

1. หา $\frac{dy}{dx}$ จาก $y = f(x)$ แล้วให้เท่ากับศูนย์ และแก้สมการหาค่า x โดยสมมติว่า แก้สมการหา

ค่า x ได้เท่ากับ a

2. นำค่า $x = a$ จากข้อ 1 ไปทดสอบ หาค่าสูงสุด หรือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยการสมมติค่า $x < a$ และ $x > a$ ในบริเวณใกล้ ๆ a แทนลงใน $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ แล้วดูการเปลี่ยนแปลงของ เครื่องหมายของ $f'(x)$

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก บวก เป็น ลบ $f(a)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ถ้า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายจาก ลบ เป็น บวก $f(a)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

3. ถ้า $f'(x)$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมายใด ๆ เลย เราจะเรียกจุด $(a, f(a))$ นี้ว่า เป็นจุดเปลี่ยนเว้า (Inflection point)

11. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 7.1 ข้อ 1 – 4 หน้า 197 – 198 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอดมสัน

12. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

13. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอดมสัน
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู

- 2.ใบเช็ครายชื่อ
- 3.แผนการจัดการเรียนรู้
- 4.เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

- 1.ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความชันของเส้นโค้ง สมการเส้นสัมผัสและเส้นตั้งฉากของเส้นโค้ง มุมที่เส้นโค้งสองเส้นตัดกัน จุดสูงสุด จุดต่ำสุด และจุดเปลี่ยนเว้า ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

บันทึกหลังการสอน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 13

หน่วยที่ 7

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 37 - 39

ชื่อหน่วย การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นการนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เรียนมาใช้ประโยชน์ให้เห็นจริง เช่น นำมาใช้ในการเขียน กราฟของฟังก์ชัน ความชันของเส้นโค้ง การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด สมพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอนุพันธ์อันดับที่สอง การนำความรู้เรื่องค่าสูงสุดและต่ำสุดไปใช้ประโยชน์ในทางช่างและชีวิตประจำวัน การหาความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง การกาอัตราสัมพัทธ์ เป็นการหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของสองสิ่งเปรียบเทียบกับกัน การหาค่าประมาณโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้
2. สามารถแก้โจทย์ปัญหา ความเร็วและความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงได้
3. สามารถแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวกับอัตราสัมพัทธ์ได้

สมรรถนะรายวิชา

1. การดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสูง และประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ

สาระการเรียนรู้

1. ความชันของเส้นโค้ง
2. ฟังก์ชันอดิสัยชนิดต่างๆ
3. อัตราสัมพัทธ์
4. การหาค่าเชิงอนุพันธ์
5. การหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับความชันของเส้นโค้ง การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จุดสูงสุด จุดต่ำสุด และจุดเปลี่ยนเว้า พร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลยเพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

1. ครูอธิบายการทดสอบหาค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้ามีขั้นตอนในการดำเนินการ ดังนี้

บทนิยาม

ถ้าค่าของ $f(a)$ ที่จุด $x = a$ มากกว่าค่าของ $f(x)$ ใดๆ ในบริเวณใกล้ๆ จุด $x = a$ ทุกจุด เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum value) ที่จุด $x = a$



จากที่ได้ศึกษาถึงจุดสูงสุดสัมพัทธ์, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้ามาแล้วนั้น

ทำนองเดียวกันค่าของ $f(b)$ ที่จุด $x = b$ น้อยกว่าค่าของ $f(x)$ ใดๆ ในบริเวณใกล้ๆ จุด $x = b$ ทุกจุด เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum value) ที่จุด $x = b$

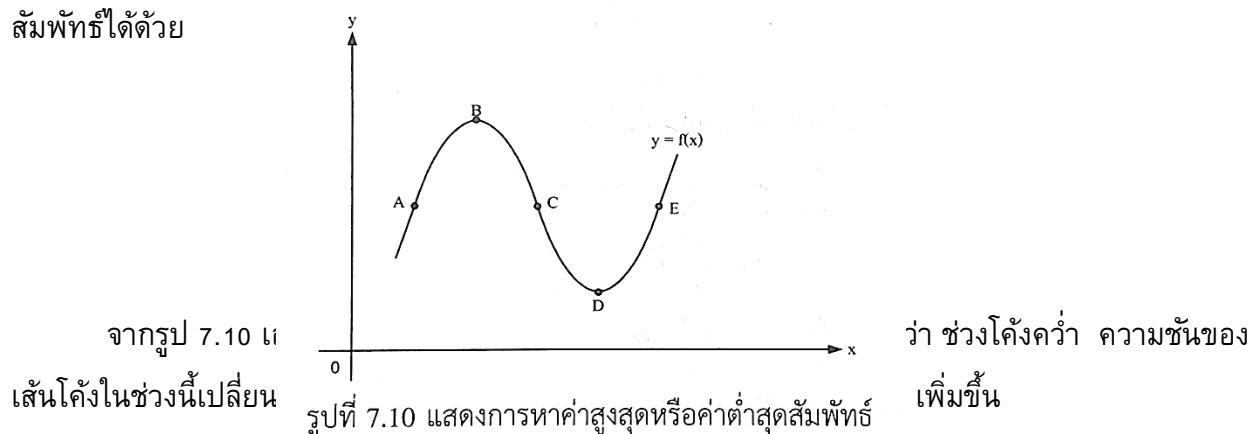
การทดสอบค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้ามีขั้นตอนในการดำเนินการ ดังนี้
ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยมี c เป็นจุดหนึ่งในช่วงเปิด (a, b) ซึ่ง $f(c) = 0$ และสมมติว่า เราสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ ได้ ทุกค่าของ x ในช่วงเปิด (a, b) เว้นแต่จะหาไม่ได้ที่ $x = c$ นั่นคือ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $x = c$ เป็นจุดวิกฤติ (Critical points) ของ $f(x)$ ที่ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < c < b$ โดยที่ f ต่อเนื่องตลอดช่วงปิด $[a, b]$, $f'(a)$ และ $f'(b)$ หาค่าไม่ได้ และ c เป็นจุดวิกฤติเพียงจุดเดียวในช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า

1. $f(c)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ ถ้า $f'(a) > 0$ และ $f'(b) < 0$
2. $f(c)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ ถ้า $f'(a) < 0$ และ $f'(b) > 0$
3. จุด $(c, f(c))$ จะเป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ $f(x)$ ถ้า $f'(a) > 0$ และ $f'(b) > 0$ หรือ $f'(a) < 0$ และ $f'(b) < 0$

ซึ่งวิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้าที่กล่าวมานี้ เราเรียกว่า
“การหาค่าสูงสุดโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง”

นอกจากวิธีการดังกล่าวแล้ว เรายังสามารถใช้อนุพันธ์อันดับสองในการหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ด้วย



อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\frac{dy}{dx}$ เทียบกับ x มีค่าเป็นลบ ในช่วงโค้งที่ว่า จุดค่าสูงสุดจะอยู่ในช่วงนี้ ดังนั้นที่จุดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $\frac{d^2y}{dx^2}$ มีเครื่องหมายเป็นลบ

เส้นโค้ง $y = f(x)$ ในช่วง CDF มีความเว้าอยู่บน เรียกว่า **ช่วงโค้งหงาย** ความชันของเส้นโค้งในช่วงนี้เปลี่ยนจากลบเป็นบวก แสดงว่า **ค่าความชันเพิ่มขึ้น** เมื่อ x เพิ่มขึ้น

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\frac{dy}{dx}$ เทียบกับ x มีค่าเป็นบวก ในช่วงโค้งหงาย จุดค่าต่ำสุดจะอยู่ในช่วงนี้ ที่จุดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $\frac{d^2y}{dx^2}$ จะมีเครื่องหมายเป็นบวก

5. กรุอธิบายตัวอย่างที่ 7.8 – 7.9 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 200 - 202 สำนักพิมพ์ เอ็มพินท์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 7.1 จากนั้นครูสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 7.1

6. ครูแนะนำการประยุกต์ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังนี้

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นถึงกระบวนการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันไปใช้ประโยชน์ให้มากที่สุด ซึ่งทำได้หลายวิธี ซึ่งในเนื้อหานี้จะสรุปวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เป็น 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนรูปประกอบเกี่ยวกับปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาทั้งหมด ให้ได้รายละเอียดให้มากที่สุด

ขั้นที่ 2 สร้างสมการจากโจทย์ที่กำหนดให้ที่มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ในรูปของตัวแปร

ขั้นที่ 3 ถ้าสมการที่สร้างขึ้นมีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแปร ต้องพยายามหาทางกำจัดตัวแปรออกไปให้เหลือเพียงฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ขั้นที่ 4 หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ตามวิธีการที่เรียนมา

ขั้นที่ 5 ใช้เทคนิคที่เรียนมาเกี่ยวกับการทดสอบค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาแต่ละตอน

7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.10 – 7.13 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 203 - 208
สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

8. ครูอธิบายความหมายอัตราสัมพัทธ์ให้ผู้เรียน ดังนี้

อัตราสัมพัทธ์ (Related Rate) คือ การเปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่างๆ เทียบกับสิ่งเดียวกัน เช่น การเปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกับเวลาที่เปลี่ยนไป

การเปรียบเทียบระยะทางกับเวลาซึ่งเราเรียกว่า ความเร็ว การเปรียบเทียบของความเร็วกับเวลา คือ ความเร่ง เป็นต้น ในเนื้อหานี้จะพูดถึงอัตราสัมพัทธ์ที่เราคุ้นเคยกันก่อน คือ เรื่องของความเร็วและความเร่ง

ความเร็ว (Velocity) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางกับเวลาที่เปลี่ยนไป กำหนดให้ระยะทาง คือ การเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งวัตถุเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ดังนั้น เราจึงเขียนระยะทางได้เป็น $s = f(t)$ นั่นคือ ระยะทาง x จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาที่เปลี่ยนไป ดังนี้

$$s = f(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

เมื่อเวลาผ่านไป Δt ระยะทางก็จะเปลี่ยนไป Δs

เมื่อเวลา $t + \Delta t$ วัตถุจะเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง $s + \Delta s$

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(2) - (1) ; \quad \Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

เมื่อเวลาเปลี่ยนไป Δt จะเทียบกับระยะทางได้เป็น $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

เราเรียก $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ว่า ความเร็วเฉลี่ย เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ ความเร็วเฉลี่ยนี้จะกลายเป็นความเร็วชั่วขณะ

ของเวลา t ใด ๆ นั่นคือ

$$\text{ความเร็วชั่วขณะเวลา } t \text{ ใด ๆ} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{เขียนแทน } \frac{ds}{dt} \text{ ด้วย } v \text{ นั่นคือ } v(t) = \frac{ds}{dt} \text{ นั่นเอง}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $v > 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $v < 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางลดลง
3. ถ้า $v = 0$ แสดงว่าวัตถุจะหยุดนิ่งชั่วขณะ



9. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.14 – 7.15 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 217 - 218 สำนักพิมพ์ เอ็มพันทน์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

10. ครูอธิบายอัตราสัมพัทธ์ เรื่องต่อไป คือเรื่อง ความเร่ง ให้ผู้เรียน ดังนี้

ก่อนที่จะวัตถุจะเปลี่ยนทิศทางเป็นตรงกันข้าม วัตถุจะหยุดนิ่งชั่วขณะก่อน ขณะนั้นความเร็วของวัตถุ จะเป็น ศูนย์

ความเร่ง (acceleration) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป

กำหนดให้ $v(t) = \frac{ds}{dt}$ เมื่อเวลาเปลี่ยนไปจาก t เป็น $t + \Delta t$ ความเร็วจะเปลี่ยนไปเป็น $v + \Delta v$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

เราเรียก $\frac{dv}{dt}$ ว่า อัตราเร่งชั่วขณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เขียนแทนด้วย a

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} \quad \text{แต่} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) \quad \text{ดังนั้น} \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $a > 0$ ความเร็วเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $a < 0$ ความเร็วลดลง
3. ถ้า v และ a มีเครื่องหมายเหมือนกัน อัตราเร็วของวัตถุจะเพิ่มขึ้น แต่
ถ้า v และ a มีเครื่องหมายต่างกัน อัตราเร็วของวัตถุจะลดลง



11. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.16 – 7.22 (อาจเลือกอธิบายบางตัวอย่าง) ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 219 - 227 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

12. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาค่าสูงสุด, ต่ำสุดสัมพัทธ์ และจุดเปลี่ยนเว้า รวมถึงการประยุกต์ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ร่วมกัน และอัตราสัมพัทธ์
13. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 7.2 ข้อ 1 – 8 หน้า 209 – 212 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์
14. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ
15. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์

2. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชั้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพันธ์ ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 14

หน่วยที่ 7

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 40-42

ชื่อหน่วย การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นการนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เรียนมาใช้ประโยชน์ให้เห็นจริง เช่น นำมาใช้ในการเขียน กราฟของฟังก์ชัน ความชันของเส้นโค้ง การหาค่าสูงสุดและต่ำสุด สัมพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอนุพันธ์อันดับที่สอง การนำความรู้เรื่องค่าสูงสุดและต่ำสุดไปใช้ประโยชน์ในทางช่างและชีวิตประจำวัน การหาความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง การหาค่าอัตราสัมพัทธ์ เป็นการหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของสองสิ่งเปรียบเทียบกับกัน การหาค่าประมาณโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของอัตราสัมพัทธ์ได้
2. สามารถหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ได้

สมรรถนะรายวิชา

1. การดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์อันดับสูง และประยุกต์อนุพันธ์ในงานอาชีพ

สาระการเรียนรู้

1. ความชันของเส้นโค้ง
2. ฟังก์ชันอดิสัยชนิดต่างๆ
3. อัตราสัมพัทธ์
4. การหาค่าเชิงอนุพันธ์
5. การหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

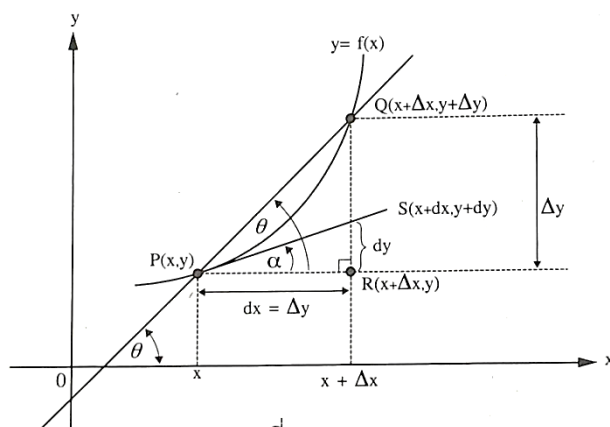
ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์พร้อมทั้งยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายการหาเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

จากเนื้อหาที่ผ่านมาเราจะเรียนมาแล้วเกี่ยวกับค่าที่เปลี่ยนแปลง นั่นคือ ถ้าค่าของตัวแปรตัวหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงจากค่าหนึ่งไปเป็นอีกค่าหนึ่ง ซึ่งความแตกต่างระหว่างค่าใหม่ของตัวแปรกับค่าเดิมหรือค่าเริ่มต้นของตัวแปรนี้ เราจะเรียกว่า ค่าที่เปลี่ยนแปลงของตัวแปร (Increment of variable) ในที่นี้เราใช้สัญลักษณ์แทนค่าที่เปลี่ยนแปลงของตัวแปร x เป็น Δx ซึ่งไม่ใช่ผลคูณของ Δ กับค่า x ดังนั้น จึงต้องเขียนติดกัน ทำนองเดียวกันกับ Δy , Δz และ $\Delta \theta$ ก็ใช้แทนค่าที่เปลี่ยนแปลงของตัวแปร y , z และ θ เช่นกัน



รูปที่ 7.16

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุด 2 จุดบนเส้นโค้ง $y = f(x)$ จากรูป 7.16 เราจะได้ว่า $\Delta x = PR$ คือ ส่วนที่เปลี่ยนแปลงไปของ x และ $\Delta y = QR$ เป็นส่วนที่เปลี่ยนแปลงของ y ให้ PS เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด P

ΔPSR เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า $\tan \alpha = \frac{RS}{PR}$ โดยที่ $PR = \Delta x$ ซึ่งเท่ากับ dx และ $\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \theta$ หรือ $\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

$$\frac{RS}{PR} = f'(x) \quad \text{นั่นเอง}$$

$$RS = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\text{นั่นคือ} \quad dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{แต่} \quad \Delta x = dx$$

$$\text{ดังนั้น} \quad dy = f'(x) dx \quad \dots\dots\dots (1)$$

ถ้าจุด Q เคลื่อนที่ตามแนวเส้นโค้ง เข้าใกล้จุด P โดยที่จุด P คงที่ ค่าของ Δx จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ เมื่อค่า Δx มีค่าน้อยลงมากๆ Δy ก็จะมีค่าเข้าใกล้ค่า RS มากขึ้น จากรูป 7.16 เราจะเห็นว่า RS คือ

ส่วนที่เปลี่ยนแปลงไปโดยประมาณของค่า y ซึ่งเราเรียกว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ หรือผลต่างอนุพันธ์ของ y เขียนแทนด้วย dy เราจะสามารถหาค่าโดยประมาณของ $y + \Delta y$ ได้จาก $y + dy$

นั่นคือ $y + \Delta y \sim y + dy$

ดังนั้น จาก $y + \Delta y$ คือ $f(x + \Delta x)$ จึงเขียนโดยประมาณ ได้เป็น

$$f(x + \Delta x) \sim f(x) + f'(x) dx \quad \dots\dots\dots (2)$$

ดังนั้น จาก $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ แสดงว่า อนุพันธ์ของ $f(x)$ คือ ค่าเชิงอนุพันธ์ของ y หาด้วย

ค่าเชิงอนุพันธ์ของ x โดยที่ dx หรือ Δx ต้องไม่เท่ากับ 0

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.23 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 229

สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

4. ครูแนะนำสูตรการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

เราสามารถนำสูตรของการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน มาดัดแปลงสูตรของการหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ทุกสูตร ดังตารางสรุปสูตรต่อไปนี้

สูตรการหาอนุพันธ์	สูตรการหาค่าเชิงอนุพันธ์
1. $\frac{dc}{dx} = 0$	1. $dc = 0$
2. $\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$	2. $d(u+v-w) = du + dv - dw$
3. $\frac{dx}{dx} = 1$	3. $dx = 1dx$
4. $\frac{d}{dx}cu = c \frac{du}{dx}$	4. $dcu = cdu$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	5. $d(uv) = u dv + v du$
6. $\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \right]$	6. $d \frac{u}{v} = \frac{1}{v^2} [v du - u dv]$
7. $\frac{d}{dx} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$	7. $du^n = n u^{n-1} du$
8. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$	8. $d \sin u = \cos u du$
9. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$	9. $d \cos u = -\sin u du$



สูตรการหาอนุพันธ์	สูตรการหาค่าเชิงอนุพันธ์
10. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	10. $d \tan u = \sec^2 u du$
11. $\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$	11. $d \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u du$
12. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$	12. $d \sec u = \sec u \tan u du$
13. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$	13. $d \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u du$
14. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	14. $d \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$
15. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	15. $d \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$	16. $d \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} du$
17. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$	17. $d \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} du$
18. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$	18. $d \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$
19. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$	19. $d \operatorname{cosec}^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$
20. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$	20. $d \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e du$
21. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$	21. $d \ln u = \frac{1}{u} \cdot du$
22. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$	22. $da^u = a^u \ln a du$
23. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$	23. $de^u = e^u du$



5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.24 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 230

สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 7.3 จากนั้นครูขออาสาสมัครผู้เรียนร่วมออกมาเฉลย ครูอธิบายการหาค่าเชิงอนุพันธ์เพิ่มเติมตัวอย่างที่ 7.25 พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

6. ครูแนะนำการหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

จากสมการที่ (2) ในหน้า 243 $f(x + \Delta x) \sim f(x) + f'(x)dx$ เราจะได้ว่า ถ้า $dx = \Delta x$ มีค่าน้อยมากๆ แต่ไม่เท่ากับ 0 เมื่อเทียบกับ x แล้วค่าของ dy จะมีค่าใกล้เคียงกับ Δy เราจึงใช้หลักเกณฑ์ตามสมการที่ 2 นี้ในการหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันได้

7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.26 – 7.29 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 232 - 235

สำนักพิมพ์เอมพันธ์

8. ครูอธิบายการหาค่าผิดพลาดโดยประมาณ (Approximate error) ดังนี้

ในการวัดค่าใดๆ ก็ตาม ไม่ว่าจะเป็นความยาว, น้ำหนัก มักจะมีข้อผิดพลาดเกิดขึ้นเนื่องจากเครื่องมือที่ใช้ในการวัดผิดพลาดเสมอ เช่น การวัดความยาวด้วยไม้บรรทัดที่มีสเกลเป็นเซนติเมตร และมีมิลลิเมตร ผลที่ได้ก็จะผิดไปจากความจริง

ถ้าเรากำหนดให้ x เป็นปริมาณที่ถูกต้องแน่นอนของ x

$x + \Delta x$ เป็นปริมาณที่วัดได้จากเครื่องมือวัด โดยมี Δx เป็นความ

ผิดพลาดของ x (error of x)

ถ้าค่าของ y ที่เราคำนวณเกี่ยวข้องกับค่า x ดังนั้น เมื่อ x มีความผิดพลาด ค่าของ y ย่อมต้องมีความผิดพลาดตามค่าของ x ไปด้วย ซึ่งเราจะกำหนดให้ Δy เป็นค่าความคลาดเคลื่อนของการคำนวณค่าของ y ซึ่ง $\Delta y \sim dy$

บทบทนิยาม

ให้ dy เป็นค่าคลาดเคลื่อนของปริมาณ y เราจะเรียกอัตราส่วนของค่าคลาดเคลื่อนกับค่าที่ได้จากการคำนวณว่า ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาณ y (relative error of y) ซึ่งเขียนแทนด้วย $\frac{dy}{y}$ และเรียก $\frac{dy}{y} \times 100\%$ ว่า ความคลาดเคลื่อนร้อยละของปริมาณ y (Percentage error of y)

9. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 7.30 – 7.31 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 236 - 237

สำนักพิมพ์เอมพันธ์

ขั้นสรุปและการประยุกต์

10. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปอัตราสัมพัทธ์ การหาค่าเชิงอนุพันธ์ และการหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

11. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 7.3 ข้อ 1 – 11 หน้า 238 – 243 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

12. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

13. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

14. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำข้อสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 7.3 ข้อ 1 - 15 หน้า 243 - 246 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอมพันธ์เป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
5. ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
6. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน
4. สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 15

หน่วยที่ 8

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 43-45

ชื่อหน่วย อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral) คือ การหาค่าของฟังก์ชัน เมื่อมีการกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาให้ โดยเรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ว่า ฟังก์ชันที่ถูกริขสิทธิ์ อีกความหมายของการอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เราเรียกว่า ปฏิยานุพันธ์ ในการคำนวณหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันต่างๆ นั้น อาจแทนค่าได้โดยตรง หรืออาจต้องมีการแปลงฟังก์ชันที่ต้องการอินทิกรัลให้เป็นฟังก์ชันใหม่ที่ง่ายขึ้น

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตหรือปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันได้
2. สามารถหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิสัย

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของปฏิยานุพันธ์
2. การหาค่าของปฏิยานุพันธ์
3. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต
4. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันอดิสัย
5. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง
6. การหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันทวินาม

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูและผู้เรียนร่วมกันสนทนาทบทวนเกี่ยวกับการประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

พร้อมทั้ง ยกตัวอย่างอย่างง่ายและร่วมกันเฉลย เพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียน

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายเรื่องความหมายปฏิยานุพันธ์

ปฏิยานุพันธ์ เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ตรงข้าม หรือผกผันกลับกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เราเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า **การอินทิเกรต** เช่น

$$\text{กำหนดให้ } y = f(x)$$

$$\text{อนุพันธ์ของฟังก์ชันเทียบกับ } x \text{ คือ } \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\text{ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน คือ } dy = f'(x)dx$$

ดังนั้น การอินทิเกรต คือ การหาว่า $f'(x)dx$ เป็นค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันใดๆ ซึ่งผลลัพธ์ของการอินทิเกรตนี้ เราเรียกว่า **อินทิกรัลหรือปริพันธ์** (Integral) ซึ่งเราจะได้ว่า อินทิกรัลตัวหนึ่งของ $f'(x)dx$ คือ $f(x)$ ค่าอินทิกรัลของ $f'(x)dx$ นี้ มีหลายค่าด้วยกัน $f(x) + c$ เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f'(x)dx$ เพราะค่าคงตัว c จะมีค่าใดๆ ก็ได้ไม่จำกัด

3. ครูอธิบายการหาค่าของปฏิยานุพันธ์

4. ครูอธิบายการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต

ในการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต สามารถหาได้โดยการใช้สูตร โดยให้นึกถึงความรู้ของค่าเชิงอนุพันธ์ (Differential) ของฟังก์ชันก่อน แล้วย้อนไปหาฟังก์ชันเดิม ก็จะทำให้เราสามารถหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิตเหล่านั้นได้เสมอ เช่น $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x \quad \text{ดังนั้น } dx = f(x) + C$$

$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

เมื่อกำหนดให้ u , v และ w เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ (เช่น x) ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ได้

a , n และ w

สูตรการหาค่าเชิงอนุพันธ์	สูตรการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต
1. $du = du$	1. $\int du = u + C$
2. $dau = a du$	2. $\int adu = a \int du$
3. $d(u + v - w) = du + dv - dw$	3. $\int d(u + v - w) = \int du + \int dv - \int dw$
4. $du^n = nu^{n-1} du$	4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $d(\ln u) = \frac{1}{u} du$	5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$

สูตรการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต มีดังนี้

จากสูตรที่ 1

$$\int du = u + C$$

$$\int dw = w + C$$

$$\int dv = v + C$$

เช่น $\int dx = x + C$

จากสูตรที่ 2

$$\int adu = a \int du$$

เช่น $\int 2dx = 2 \int dx = 2(x) + C$

$$\int -\frac{3}{2} dx = -\frac{3}{2} \int dx = -\frac{3}{2}(x) + C$$

จากสูตรที่ 3

$$\int d(u + v - w) = \int du + \int dv - \int dw \quad \text{เช่น}$$

เช่น $\int d(x^2 + 2x - 5) = \int d(x^2) + \int d(2x) - \int d5$

สูตรที่ 3 นี้ เราอาจเขียนได้ในรูปของ $\int (f(u) \pm g(u)) du$

นั่นคือ $\int (f(u) \pm g(u)) du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$

เช่น $\int (x^2 + 3x) dx = \int x^2 dx + \int 3x dx$
 $= \int x^2 dx + 3 \int x dx$

จากสูตรที่ 4

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{โดยที่ } n \neq -1$$

เช่น $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

5. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8.1 - 8.2 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 253 - 254 พร้อมสุมเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

6. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 8.1 แล้วสุมเลือกผู้เรียนออกมาเฉลย

7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8.3.- 8.10 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 254 - 259 พร้อมสุมเรียกถามนักผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้

ขั้นสรุปและประยุกต์

8. ครูและผู้เรียนช่วยร่วมสรุปการหาค่าของปฏิยานุพันธ์และการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต

9. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 8.1 ข้อ 1-10 หน้าที่ 260 - 262 ในหนังสือแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอดมพันธ์

10. ครูเฉลยพร้อมนักศึกษาทั้งชั้น

11. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำข้อสอบในแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 8.1 ข้อ 1 - 15 หน้า 262 - 265 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 สำนักพิมพ์เอดมพันธ์เป็นการบ้านเพื่อเป็นทบทวนเนื้อหาที่ได้เรียนไป

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอดมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ

3.แผนการจัดการเรียนรู้

4.เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1.ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง

2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด

3.แบบทดสอบเก็บคะแนน

4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เครื่องมือวัดผล

1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง

2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

3.แบบทดสอบเก็บคะแนน

4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

5.ประเมินพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึง

ประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชั้นๆให้นักศึกษาเขียนโจทย์เกี่ยวกับการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิตครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 16

หน่วยที่ 8

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 46-48

ชื่อหน่วย อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral) คือ การหาค่าของฟังก์ชัน เมื่อมีการกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาให้ โดยเรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ว่า ฟังก์ชันที่ถูกริขสิทธิ์ อีกความหมายของการอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เราเรียกว่า ปฏิยานุพันธ์ ในการคำนวณหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันต่างๆ นั้น อาจแทนค่าได้โดยตรง หรืออาจต้องมีการแปลงฟังก์ชันที่ต้องการอินทิกรัลให้เป็นฟังก์ชันใหม่ที่ง่ายขึ้น

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้
2. สามารถหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันอดิสัยได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอนุพันธ์ของพีชคณิต และฟังก์ชันอดิสัย

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของปฏิยานุพันธ์
2. การหาค่าของปฏิยานุพันธ์
3. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต
4. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันอดิสัย
5. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง
6. การหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันทวินาม

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูสนทนาซักถามผู้เรียนเกี่ยวกับความหมายของปฏิยานุพันธ์ การหาค่าปฏิยานุพันธ์ และการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต เพื่อถามถึงปัญหา ข้อสงสัย และร่วมกันอภิปรายเพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนด้วยความเป็นกันเอง

2. ครูและผู้เรียนร่วมกันเฉลยแบบทดสอบของแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 8.1

ขั้นสอน

3. ครูอธิบายการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันอดิศัย ดังนี้

การหาค่าปริยานุพันธ์ หรือการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต ได้มาจากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ซึ่งค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติมีดังนี้

$$\begin{aligned} 1. \quad d \sin u &= \cos u \, du \\ \int \cos u \, du &= \int d \sin u \\ \int \cos u \, du &= \sin u + C \end{aligned} \quad \text{สูตรที่ 1}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad d \cos u &= -\sin u \, du \\ \int \sin u \, du &= -\int d \cos u \\ \int \sin u \, du &= -\cos u + C \end{aligned} \quad \text{สูตรที่ 2}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad d \tan u &= \sec^2 u \, du \\ \int \sec^2 u \, du &= \int d \tan u \\ \int \sec^2 u \, du &= \tan u + C \end{aligned} \quad \text{สูตรที่ 3}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad d \cot u &= -\operatorname{cosec}^2 u \, du \\ \int \operatorname{cosec}^2 u \, du &= -\int d \cot u \\ \int \operatorname{cosec}^2 u \, du &= -\cot u + C \end{aligned} \quad \text{สูตรที่ 4}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad d \sec u &= \sec u \cdot \tan u \, du \\ \int \sec u \cdot \tan u \, du &= \int d \sec u \\ \int \sec u \cdot \tan u \, du &= \sec u + C \end{aligned} \quad \text{สูตรที่ 5}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad d \operatorname{cosec} u &= -\operatorname{cosec} u \cdot \cot u \, du \\ \int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u \, du &= -\int d \operatorname{cosec} u \\ \int \operatorname{cosec} u \cot u \, du &= -\operatorname{cosec} u + C \end{aligned} \quad \text{สูตรที่ 6}$$

จากสูตรการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต หรือปฏิยานุพันธ์ทั้ง 6 สูตรนี้ มีพื้นฐานมาจากการหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน เราสามารถนำความรู้จากเรื่อง ค่าเชิงอนุพันธ์มาประยุกต์หรือดัดแปลงเพื่อสร้างสูตรเพิ่มเติมได้อีก 4 สูตรด้วยกันดังการพิสูจน์ในหนังสือแคลคูลัส 1 หน้า 267 – 268

สำนักพิมพ์เอมพันธ์

4. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8.11 – 8.13 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 268-269

สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งส้อมเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

5. ครูแนะนำการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันอดิศัยเพิ่มเติม ดังนี้

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติบางครั้งจะอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันคูณกัน หรืออยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง จำไม่สามารถอินทิเกรตได้ทันทีที่ต้องมีการดัดแปลงฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านั้นก่อน จึงจะสามารถอินทิเกรตได้สะดวกขึ้น แบ่งลักษณะโจทย์ดังกล่าวออกเป็น 6 ลักษณะ คือ

1. $\int \sin^n x \, dx$ หรือ $\int \cos^n x \, dx$
2. $\int \sin^m \cos^n x \, dx$
3. $\int \sin Ax \cdot \cos Bx \, dx$, $\int \sin Ax \cdot \sin Bx \, dx$, $\int \cos Ax \cdot \cos Bx \, dx$
4. $\int \tan^n x \, dx$ หรือ $\int \cot^n x \, dx$
5. $\int \sec^n x \, dx$ หรือ $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$
6. $\int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx$ หรือ $\int \cot^m x \cdot \operatorname{cosec}^n x \, dx$

5. ครูยกตัวอย่างการหาอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบที่ 1 กรณีที่ 1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 ตัวอย่างที่ 8.14 – 8.31 (อาจเลือกบางตัวอย่างไม่ต้องครบ) หน้า 270 - 271 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งส้อมเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

6. ครูอธิบายการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง ดังนี้

การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ a และ C เป็นค่าคงตัว เราสามารถเขียนสูตรของการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง โดยอาศัยนิยามของค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง นั่นคือ

สูตรที่ 1 $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} d \left(\frac{a^u}{\ln a} + C \right) &= d \left(\frac{a^u}{\ln a} \right) + d C \\ &= \frac{a^u \ln a}{\ln a} + 0 \\ &= a^u du \\ a^u du &= d \left(\frac{a^u}{\ln a} + C \right) \end{aligned}$$

สูตรที่ 2 $\int e^u du = e^u + C$

พิสูจน์

$$\begin{array}{ll} \text{จากสูตรที่ 1} & \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \\ \text{แทนค่า } a = e ; & \int e^u du = \frac{e^u}{\ln e} + C \\ \text{ดังนั้น} & \int e^u du = e^u + C \end{array}$$

7. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8.32 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 290 สำนักพิมพ์ เอ็มพินธ์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 8.2 เพื่อทดสอบความเข้าใจ แล้วให้ผู้เรียนอาสาออกมาเฉลย ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง

8. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8.33 – 8.34 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 290 - 291 สำนักพิมพ์เอ็มพินธ์ พร้อมทั้งมอบหมายให้ผู้เรียนทำกิจกรรมที่ 8.3 เพื่อทดสอบความเข้าใจ แล้วให้ผู้เรียนอาสาออกมาเฉลย ครูและเพื่อนๆ ร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง

9. ครูยกตัวอย่างเพิ่มเติมในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 ตัวอย่างที่ 8.35 - 8.37 หน้า 291 - 29 สำนักพิมพ์เอ็มพินธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

10. ครูอธิบายการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันทวินาม ดังนี้

ในบางกรณีของการหาค่าอินทิกรัล ฟังก์ชันที่จะถูกอินทิเกรตอาจจะอยู่ในรูปของ $ax^2 + bx + c$ หรือ $\sqrt{a^2 + b^2} + c$ ซึ่งเป็นรูปแบบของ การกระจายทวินามได้ เราเรียกเทอมที่อยู่ในรูปแบบนี้ว่าเป็น สัมประสิทธิ์ของเทอม x และ x^2 สามารถเขียนรวมเทอมให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้ หลักเกณฑ์ที่สำคัญของการแปลงรูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง คือ

การเขียน $f(x) = ax^2 + bx + c$ ให้อยู่ในรูป $a(u^2 + B)$ ซึ่งทำได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จาก } ax^2 + bx + c &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น เราจะให้ } u = \left(x + \frac{b}{2a}\right) \text{ และ } B = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

เมื่อจัดฟังก์ชันเข้าไปในลักษณะของ Binomial 's coefficient จะจัดได้ใน 3 รูปแบบ คือ

$u^2 + a^2$, $u^2 - a^2$ และ $a^2 - u^2$ ซึ่งจะมีสูตรมาช่วยในการอินทิเกรต คือ

	1.	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$	หาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แต่ เียนต้องใช้การเปลี่ยนตัวแปรโดยแทนค่า
ถ้าโจทย์	2.	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$	
ด้วยฟังก์	3.	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + C$	

11. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 8.38 – 8.43 (อาจเลือกบางตัวอย่างไม่ต้องครบ) ในหนังสือ
เรียนแคลคูลัส 1 หน้า 294 – 296 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุม่เรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อ
เป็นการกระตุ้นผู้เรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

12. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันอดิสัย
13. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 8.2 และ 8.3 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1
สำนักพิมพ์เอมพันธ์
14. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ
15. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนการสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
2. ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบเก็บคะแนน

4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เครื่องมือวัดผล

1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง

2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน

3.แบบทดสอบเก็บคะแนน

4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล

5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เกณฑ์การประเมินผล

1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป

4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง

5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)

6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูแจกกระดาษเป็นชิ้นๆ ให้นักศึกษาเขียนโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันอดิศัย ครูรวบรวมและทำเป็นสลาก ให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

แผนการจัดการเรียนรู้แบบบูรณาการที่ 17

หน่วยที่ 9

รหัส 30000-1404

แคลคูลัส 1

คาบที่ 49-51

ชื่อหน่วย อินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์

จำนวน 3 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ฟังก์ชัน $f(x)$ ใดๆ ที่ต่อเนื่องในช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ $f(x)$ หาอินทิกรัลได้ และมีอินทิกรัลไม่จำกัดเขตเป็น $F(x)$ แล้ว อินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ คือ $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ อินทิกรัลจำกัดเขตมีสมบัติบางประการสืบเนื่องจากอินทิกรัลไม่จำกัดเขต สมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขตมีประโยชน์มาก ใช้ในการหาค่าพื้นที่ใต้เส้นโค้ง พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง หาปริมาตรของเส้นโค้งที่ หมุนรอบแกน เป็นต้น

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขตได้
2. สามารถคำนวณหาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันในช่วงปิดที่กำหนดให้ได้
3. สามารถหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งกับแกนได้
4. สามารถหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นได้

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับอินทิกรัลจำกัดเขต และประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

สาระการเรียนรู้

1. อินทิกรัลจำกัดเขต
2. การประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขต
3. การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูสนทนาซักถามผู้เรียนเกี่ยวกับการอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เพื่อถามถึงปัญหา ข้อสงสัยและร่วมกันอภิปรายเพื่อทดสอบความเข้าใจของผู้เรียนด้วยความเป็นกันเอง

ขั้นสอน

2. ครูอธิบายการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยการอธิบาย จากทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

อินทิกรัลจำกัดเขต (Denite Integral) ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ เราจะกล่าวถึงการอินทิกรัลของฟังก์ชัน f ในช่วงปิด $[a, b]$ ได้ โดยเรียกว่า เป็นการอินทิกรัลจำกัดเขตจาก a ถึง b เท่านั้น เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$

ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันบนช่วงปิด $[a, b]$ เช่นกัน โดยที่ $F'(x) = f(x)$ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส เขียนด้วยสัญลักษณ์

$F(x) \Big|_a^b$ แทน $F(b) - F(a)$ ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว

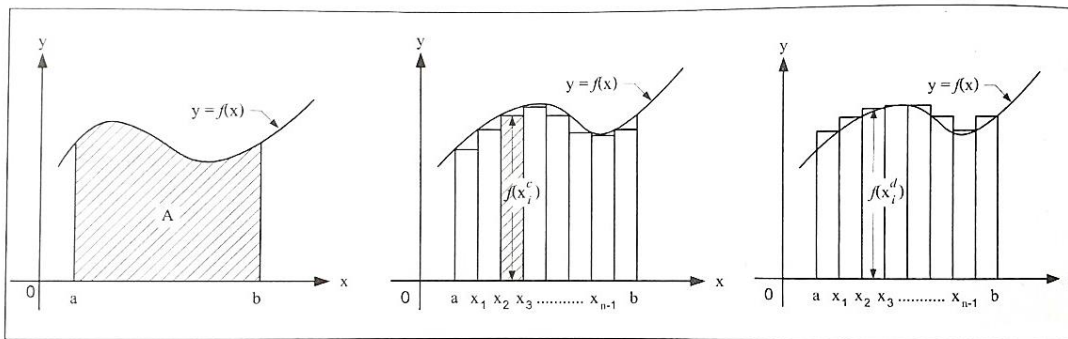
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ในการหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลนี้ ต้องหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้ก่อน โดยไม่ต้องบวกค่า C เพราะเมื่อแทนค่า $x = b$ และ $x = a$ ใน $F(x)$ แล้วหาค่า $F(b) - F(a)$ ค่าของ C จะลบกันหมดไปเอง

3. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 9.1 - 9.3 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 304-306
สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

4. ครูอธิบายการประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขต ได้แก่ 1. การหาพื้นที่ใต้โค้ง
2. การหาความยาวของเส้นโค้ง 3. การหาปริมาตรของรูปทรงจากการหมุน และ 4. การหางาน ซึ่งครูแนะนำว่าในชั่วโมงนี้เราจะเรียนการประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขตสำหรับการหาพื้นที่ใต้โค้งก่อน

การหาพื้นที่ใต้โค้ง การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งกันแกน



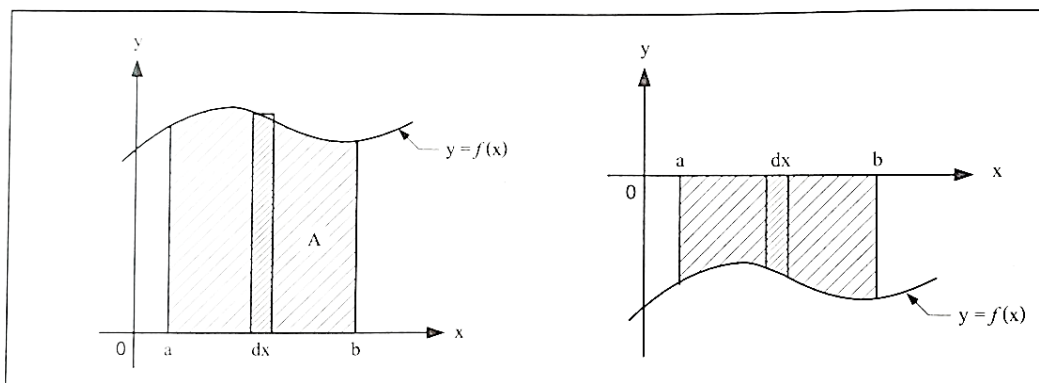
รูปที่ 9.1

รูปที่ 9.2

รูปที่ 9.3

พื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งกับแกน หมายถึง พื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง และแกน x หรือแกน y ดังรูปที่ 9.4 ถึง 9.7 ต่อไปนี้

1. เส้นโค้งกับแกน x จะมีอยู่ 2 ลักษณะ คือ เส้นโค้งอยู่เหนือแกน x (รูป 9.4) และเส้นโค้งอยู่ใต้แกน x (รูป 9.5)

รูปที่ 9.4 เส้นโค้งอยู่เหนือแกน x รูปที่ 9.5 เส้นโค้งอยู่ใต้แกน x

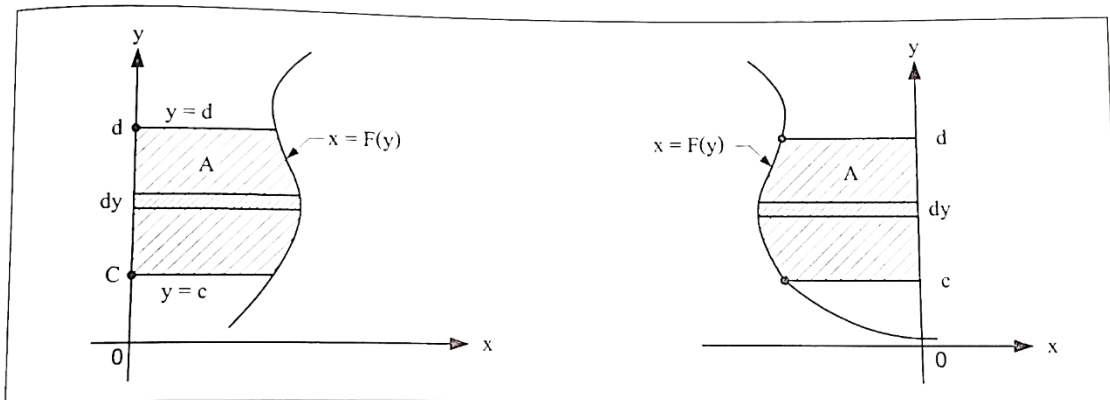
ถ้าเส้นโค้งอยู่เหนือแกน x ตามรูปที่ 9.4 แสดงว่า $f(x) \geq 0$ ทุกค่าของ x บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้วเราสามารถหาพื้นที่ได้เป็น

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

ถ้าเส้นโค้งอยู่ใต้แกน x ตามรูปที่ 9.5 แสดงว่า $f(x) < 0$ ทุกค่าของ x บนช่วงปิด $[a, b]$ เราสามารถหาพื้นที่ได้เป็น

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

2. เส้นโค้งกับแกน y จะมีอยู่ 2 ลักษณะ คือ เส้นโค้งอยู่ทางขวาแกน y (รูป 9.6) และเส้นโค้งอยู่ทางซ้ายแกน y (รูป 9.7) $[F(x)]_a^b$



รูปที่ 9.6 เส้นโค้งอยู่ทางขวาของแกน y

รูปที่ 9.7 เส้นโค้งอยู่ใต้แกน x

ในทำนองเดียวกัน ถ้า A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x = F(y)$, แกน y และเส้นตรง $y = c$ ถึง $y = d$ ตามรูปที่ 9.6 และ 9.7 เราสามารถหาพื้นที่ A ได้ดังนี้

$A = \int_a^b F(y) dy$ เมื่อ $F(y) \geq 0$ ทุกค่าของ y บนช่วงปิด $[c, d]$ และพื้นที่ที่ได้จะอยู่ทางขวาของแกน y หรือ $A = -\int_a^b F(y) dy$ เมื่อ $F(y) < 0$ ทุกค่าของ y บนช่วงปิด $[c, d]$ และพื้นที่ที่ได้จะอยู่ทางซ้ายของแกน y

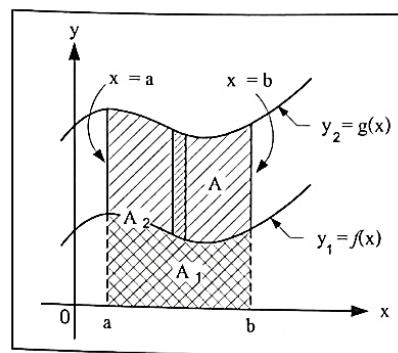
5. ครูอธิบายการหาพื้นที่ใต้โค้งโดยการยกตัวอย่างที่ 9.4-9.5 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 310 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

6. ครูแนะนำการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยที่ $f(x) \leq g(x)$ ทุกค่า x บนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้น พื้นที่ A จะเป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y_1 = f(x)$ เส้นโค้ง $y_2 = g(x)$ เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ ซึ่งมีทั้งหมด 3 รูปแบบด้วยกัน ดังรูปที่ 9.10-9.12

รูปแบบที่ 1 (รูปที่ 9.10) เส้นโค้งอยู่เหนือแกน x ทั้ง 2 เส้น พื้นที่ A หาได้จาก

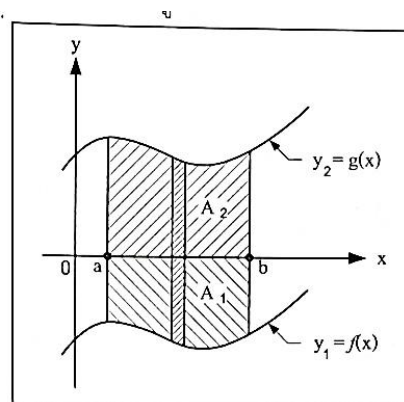
$$\begin{aligned} A &= A_2 - A_1 \\ A &= \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \\ \therefore A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \end{aligned}$$



รูปที่ 9.10

รูปแบบที่ 2 (รูปที่ 9.11) เส้นโค้ง $y_2 = g(x)$ อยู่เหนือแกน x และ $y_1 = f(x)$ อยู่ใต้แกน x พื้นที่ A หาได้จาก

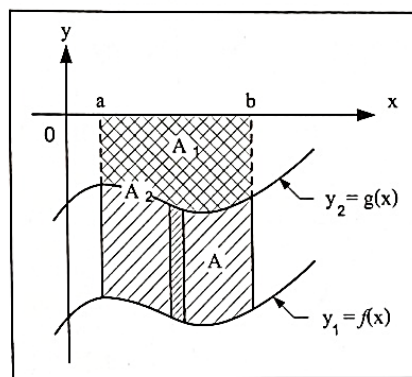
$$\begin{aligned} A &= A_2 + A_1 \\ A &= \int_a^b g(x) \, dx + \left(- \int_a^b f(x) \, dx \right) \\ \therefore A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx \end{aligned}$$



รูปที่ 9.11

รูปแบบที่ 3 (รูปที่ 9.12) เส้นโค้งอยู่ใต้แกน x ทั้ง 2 เส้น พื้นที่ A หาได้จาก

$$\begin{aligned} A &= A_2 - A_1 \\ A &= - \int_a^b f(x) \, dx - \left(- \int_a^b g(x) \, dx \right) \\ \therefore A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx \end{aligned}$$

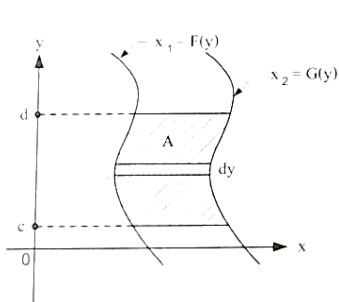


รูปที่ 9.12

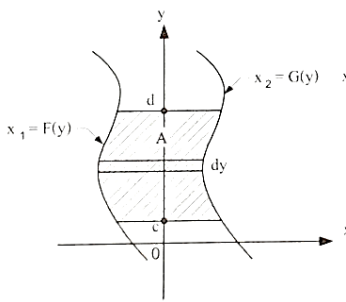
ซึ่งจะเห็นได้ว่า การหาค่าพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นนี้ ใช้หลักในการหาเหมือนกัน นั่นคือ

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx$$

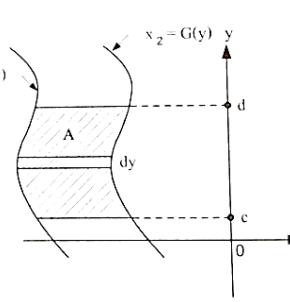
ในทำนองเดียวกัน พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x_1 = F(y)$ เส้นโค้ง $x_2 = G(y)$ โดยที่ $F(y) \leq G(y)$ ทุกค่าของ y บนช่วงปิด $[c, d]$ และเส้นโค้ง $y = c$ เส้นตรง $y = d$ ซึ่งเขียนได้ 3 แบบเช่นกัน ดังรูปที่ 9.13 – 9.15 ดังนี้



รูปที่ 9.13



รูปที่ 9.14



รูปที่ 9.15

ครูแนะนำการหาค่าพื้นที่ A ได้จากสูตรทำนองเดียวกันกับในตอนแรก เพียงแต่เปลี่ยนลิมิตของการอินทิเกรตเท่านั้นคือ

7. ครูอธิบายการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นโดยการยกตัวอย่างที่ 9.6-9.8 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 312-314 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

8. ครูมอบหมายให้ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 9.1 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 315-317 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

9. ครูอธิบายการประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขต เรื่อง การหาความยาวของส่วนโค้งฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องที่อนุพันธ์อันดับหนึ่ง เรากล่าวว่าฟังก์ชันมีความราบเรียบ (smooth) และเรียกกราฟของฟังก์ชันนี้ว่าเส้นโค้งราบเรียบ (smooth curve)

สูตรความยาวของส่วนโค้ง

ก. ถ้า $f(x)$ มีความราบเรียบบนช่วง $[a, b]$ แล้ว ความยาวส่วนโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ คือ

$$L = \int_a^b 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

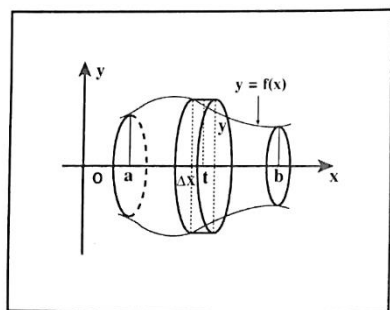
ข. ถ้า $f(x)$ มีความราบเรียบบนช่วง $[c, d]$ แล้ว ความยาวส่วนโค้ง $x = g(y)$ จาก $y = c$ ถึง $y = d$ คือ

$$L = \int_c^d 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

10. ครูอธิบายตัวอย่างที่ 9.9 - 9.10 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 318 - 319 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

11. ครูอธิบายการประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขต เรื่องที่ 3.การหาปริมาตรของรูปทรงจากการหมุน

รูปทรงที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$, $y = 0$ (แกน x), $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 9.19 รอบแกน x แกนหมุนเป็นเส้นของขอบพื้นที่จะได้รูปทรงตัน



รูปที่ 9.19

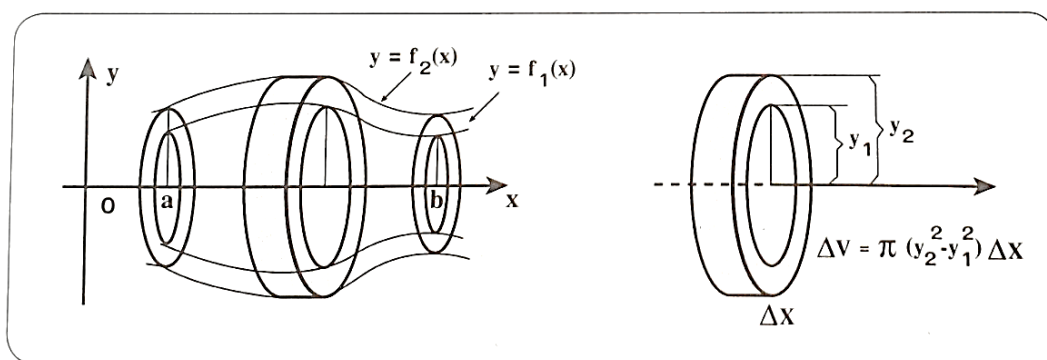
กรณีที่แกนหมุนไม่ได้เป็นเส้นขอบของพื้นที่ เมื่อหมุนไปแล้วจะเป็นรูปทรงข้างในกลวง ดังรูปที่ 9.19

ปริมาตรของรูปทรงตัน

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

วิธีการดังกล่าวนี้เรียกว่า วิธีการแบบจาน



รูปที่ 9.20 ก

รูปที่ 9.20 ข

การหมุนพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f_1(y)$ และ $y = f_2(y)$ เมื่อ $x = a$ ถึง $x = b$ รอบแกน x (เมื่อแกน x เป็นแกนหมุนเท่านั้น)

ปริมาตรของรูปทรง

$$V = \pi \int_a^b [f_2(x)^2 - f_1(x)^2] dx$$

วิธีการนี้เรียกว่า วงรีวงแหวน (Washer method)

12. ครูอธิบายการหาปริมาตรของรูปทรงจากการหมุนโดยการยกตัวอย่างที่ 9.11-9.12 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 321 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

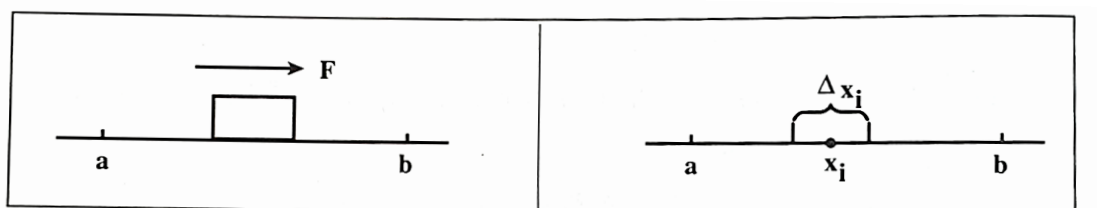
13. ครูอธิบายการประยุกต์ของอินทิกรัลจำกัดเขต เรื่องที่ 4.การหางาน

สมมติว่าแรง F ซึ่งเป็นค่าคงตัวกระทำในแนวแกน x ต่อวัตถุ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่จากจุด a ไปยังจุด b ดังรูปที่ 9.23 ค่าของงานที่ทำได้ ซึ่งจะเรียกว่า งาน แทนด้วย W กำหนดดังนี้

$$W = F(b - a)$$

นั่นคือ งาน = แรง $\times$ ระยะทางที่เปลี่ยนไป

ถ้าแรงมีหน่วยเป็นปอนด์ และระยะทางมีหน่วยเป็นฟุต จะได้งานมีหน่วยเป็น ฟุต - ปอนด์



รูปที่ 9.23

รูปที่ 9.24

ระยะทางเป็นช่วงเล็กๆ Δx_1 ดังรูปที่ 9.24 แรงที่กระทำในช่วงเล็กๆ นีคือ

$$\Delta F_i = F(x_i) \Delta x_i$$

เมื่อรวมงานย่อยๆ เหล่านี้จะเป็นงานที่กระทำทั้งหมด

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

14. ครูอธิบายการหางานโดยการยกตัวอย่างที่ 9.13-9.14 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 322-323 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคล

15. ครูแนะนำเนื้อหาเพิ่มเติมเกี่ยวกับเรื่อง กฎของฮุก (Hook's Law)

แรงภายในสปริงที่จะทำให้สปริงยืดหรือหดกลับมาสู่ตำแหน่งสมดุล จะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับระยะทางที่สปริงยืดหรือหดจากตำแหน่งสมดุล

ถ้าให้ F เป็นขนาดของแรงที่ทำให้สปริงกลับคืนสู่ตำแหน่งสมดุล และให้ x เป็นระยะทางที่สปริงยืดหรือหดจากตำแหน่งสมดุล เราได้

$$F \propto x$$

หรือ $F = kx$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัว และเรียก k ว่า ค่าคงตัวของสปริง

16. ครูอธิบายการประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขตเกี่ยวกับการใช้กฎของฮุกโดยการยกตัวอย่างที่ 9.15 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 324 สำนักพิมพ์เอมพันธ์ พร้อมทั้งสุ่มเรียกถามผู้เรียนเป็นรายบุคคลเพื่อกระตุ้นผู้เรียน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

17. ครูและผู้เรียนช่วยกันสรุปการประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขต เรื่อง การหาความยาวของส่วนโค้ง การหาปริมาตรของรูปทรงจากการหมุน และและการหางาน

18. ผู้เรียนทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 9.2 ในหนังสือเรียนแคลคูลัส 1 หน้า 325 - 327 สำนักพิมพ์เอมพันธ์

19. ครูให้ผู้เรียนจับคู่กันเปรียบเทียบคำตอบ

20. ครูเฉลยพร้อมผู้เรียนทั้งชั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ของสำนักพิมพ์เอมพันธ์
2. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

หลักฐาน

1. บันทึกการสอนของครู
2. ใบเช็ครายชื่อ
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. เนื้อหาในหนังสือเรียน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง

- 2.ประเมินความเรียบร้อยของ กิจกรรมและแบบฝึกหัด
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน
- 4.สังเกตพฤติกรรมรายบุคคล
- 5.ประเมินพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

การวัดผลและการประเมินผล(ต่อ)

เกณฑ์การประเมินผล

- 1.แบบประเมินผลความก้าวหน้าของตนเอง เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 2.กิจกรรมและแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 3.แบบทดสอบเก็บคะแนน เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
- 4.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรมรายบุคคล ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
- 5.เกณฑ์ผ่านการสังเกตพฤติกรรม การเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม คือ ปานกลาง (50% ขึ้นไป)
- 6.การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับ การประเมินตามสภาพจริง

กิจกรรมเสนอแนะ

ครูให้นักศึกษาค้นคว้าโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการประยุกต์อินทิกรัลจำกัดเขต ครูรวบรวมและทำเป็น
สลากให้นักศึกษาในชั้นสุ่มจับและตอบคำถามของเพื่อน

